I. IV. 48.

139

Algebra

Ma.
o
139

BIBLIOTHECA BAMBERGENSIS

Vorrede.

So schön die Algebra, und so gros ihr Nutzen nicht nur in der ganzen Mathematik, sondern auch in dem gemeinen Leben ist, und so sehr sie dem menschlichen Verstande Ehre macht, da sie dessen Erkenntniß auf den höchsten Gipfel erhebet: so viele Anstösse finden gleichwol die Anfänger bey deren Erlernung. Einigen komt diese Art zu rechnen gar zu schwer vor; andere können sich keinen Begriff machen, was doch die Buchstaben bedeuten sollen; noch andere halten sie für eine unnütze Grille, die höchstens in denen Theilen der Mathematik ihren Nutzen habe, welche in dem gemeinen Leben nicht zu gebrauchen sind; besonders sey sie zum Rechnen gar nicht nöthig, und es lasse sich alles durch die gemeine Rechenkunst berech-

 nen.

nen. Alle diese Umstände und Vorurtheile habe ich bey verschiedenen meiner Zuhörer, denen ich, nebst den übrigen Theilen der Mathematik, auch die Algebra erklärte, von Zeit zu Zeit wahrgenommen.

Um dieser Ursache willen habe ich meinen lieben Zuhörern zu Gefallen diese wenige Blätter zusammen geschrieben. Ich habe mich bemühet, so wol die Buchstaben-Rechenkunst, als die algebraische Auflösung, so leicht, so deutlich und so sinnlich zu machen, daß ich glaube, ein Kopf, der nur ein wenig aufgeklärt ist, und die gemeine Rechenkunst inne hat, werde sich auch ohne Anweisung darein finden können. Hiernächst habe theils aus verschiedenen andern Schriften, die aber Kürze halber anzuführen nicht für nöthig erachtet, theils aus eigenen Einfällen Aufgaben zusammen gelesen, um so wol den Anfängern durch viele Uebungen eine Fertigkeit beyzubringen, als auch sie durch viele Beyspiele zu überzeugen, theils, daß man auch in denen Rechnungen, so in dem gemeinen Leben vorkommen, öfters ohne Erkänntniß der Algebra nicht fortkommen könne; theils aber, daß die Algebra auch in denen Fällen, wo die gemeine Rechenkunst zwar hinreichet, doch vortrefliche Leichtigkeit und Vortheile verschaffe.

Meine Absicht gieng nicht allein dahin, einen Unterricht zu geben, wie diejenige, meistens nur zur Lust gemachte

arith-

arithmetische Fragen, aufzulösen seyen, die nach der gemeinen Rechenkunst nicht aufgelöset werden können: sondern ich brauchte vielmehr jede Gelegenheit, die Vortheile, die man in höheren mathematischen Dingen, bey Anwendung der Algebra, nöthig hat, unvermerkt und nach und nach denen Gemüthern der Anfänger einzuflösen, und dadurch eine Lust zu erwecken, dabey nicht stille zu stehen, sondern immer tiefer in die angenehme Geheimnisse der Mathematik einzudringen und die tiefsinnigen Arbeiten der grossen und um die Mathematik verdienten Männer durchzugehen. Meine Absicht hat auch bey vielen meiner Zuhörer die erwünschte Erfüllung gehabt, auch bey solchen, denen ich von Anfang mit vieler Mühe, will nicht sagen einen kleinen Geschmack beybringen, sondern nur ihre Abneigung benehmen mußte.

Ich war niemals gesonnen, diese wenige Blätter, die ich zu meinem Vergnügen und Nutzen meiner Zuhörer geschrieben, dem Druck zu überlassen; theils weil ich die ohne dem mit Büchern überladene Welt nicht gern mit noch mehrern belästigen wolte; theils weil ich in denenselben nichts neues, sondern nur Milchspeise auf eine faßliche und leichte Art vorgetragen hatte. Allein ich wurde von vielen ersucht, sie dem Druck zu überlassen, weil sie glaubten, es würden andere, um der Leichtigkeit willen, eben so wol Lust zu dieser so nützlichen Wissenschaft bekommen, als meine Zuhörer, und eben so viel

Nutzen, als sie, daraus schöpfen; Ich gab also ihrem Ansinnen um so mehr Platz, weil diese wenige Blätter viel zu klein sind, als daß sie die Welt belästigen solten. Ob die übrige Stücke, die zur Algebra gehören, auf gleiche Art erscheinen werden, weiß ich selber nicht. Solte die gütige Aufnahme dieser Blätter mich versichern, daß denen Anfängern einiger Nutzen verschaft werde, würde mich, um ihnen nützlich zu seyn, die Mühe nicht dauren, wiewol dergleichen Arbeit mehr eine Lust als Mühe zu nennen. Und dieses ist es, was ich kürzlich zum voraus erinnern sollen.

Vorrede zur zweyten Ausgabe.

Der Verfasser gegenwärtigen Werks schien mir viel gewagt zu haben, daß er eine Algebra selbst mit zum Gebrauch der niedern Schulen verfaßt hatte, da solche Anleitungen doch auf vielen der hohen ziemlich entbehrlich sind. Er muß indessen seine Absicht erreicht haben, weil nach der ersten Ausgabe von 1761 jezt eine neue verlangt wird. Wegen der Deutlichkeit im Vortrag der Regeln, und der mannigfaltigen nicht übel gewählten Exempel, zur Uebung, hielt ich das Werk unter der Gestalt, in welcher es zuerst heraus gekommen ist, Anfängern für sehr nützlich, und ich habe davon auf diese Art in den Göttingischen gelehrten Anzeigen geurtheilet. Ich wolte daher die Freyheit, die man mir jetzo darüber ertheilte, nur an solchen Stellen brauchen, wo, nach meiner Einsicht, Veränderungen höchstnothwendig waren.

Eine der vornehmsten ist bey dem 130 §. die Auflösungen der quadratischen Gleichungen, die ich deutlicher und umständlicher vortragen mußte. Die Auflösungen der 52; 53; 54 und 55 Aufgaben habe ich auf die allgemeine Formel, welche nach den quadratischen Gleichungen aufgelöset werden, gebracht, so daß man nur statt der Buchstaben die Zahlen setzt. Statt des 156; 157 §. der alten Ausgabe sind hier andere zu finden, in denen angezeigt wird, warum

eine

eine Gleichung oft mehr als eine Wurzel hat. Des 170 §. Auflösung ist verbessert, die Summirung unendlicher geometrischer Reihen des 196 = = 201 §§. auf die gehörige Art vorgetragen, imgleichen die Summirung der Reihen von Potenzen des 276 §. verbessert worden. Kleinere Zusätze und Verbesserungen übergehe ich.

Sehr viel Aufgaben in diesem Werke zeigen den Nutzen der Algebra bey ökonomischen oder andern, nach jedermans Geständnisse, brauchbaren Untersuchungen, z. E. die 79 u. f. die 86; 88; u. d. g. m. Ich hätte gewünscht, gleich nützliche statt einiger andern zu setzen, die nur zur Uebung im Rechnen dienen. Ich habe dergleichen etwas in der 35 Aufgabe bewerkstelliget, und das, was zuvor in der Aufgabe, die diese Zahl hatte, vorkam, zur achten, wo es hingehörte, gebracht.

Ganze Aufgaben mit andern zu vertauschen, fand ich deswegen nicht für gut, weil es vielleicht manchen, die dieses Buch bisher gebraucht haben, beschwerlich gewesen wäre. Ich fand auch keine Aufgaben, die ihre Stelle nicht wenigstens dadurch verdienten, daß sie dem Anfänger Gelegenheit verschafften, eine Fertigkeit in den algebraischen Rechnungen zu erlangen. Und so gibt dieses Buch eine sehr gute Vorbereitung zu dem Gebrauch der Algebra, die in der Geometrie und überall, wo sich Mathematik anbringen läßt, so unentbehrlich ist. Der Verleger hat dieser Schrift das nemliche Format gegeben, welches die von mir im Dec. 1766 ebenfalls verbesserte und 1767 neu gedruckte Malerische Geometrie erhalten, damit man beyde, nach Belieben, in einen Band binden könne. Göttingen im May 1768.

Abraham Gotthelf Kästner,

Kön. Großbr. Hofrath und Prof. der Physik und Mathematik.

Von der

Algebra.

Die 1. Erklärung.

§. 1.

Eine Grösse ist, was sich mehren und minderen läßt, und doch noch unter die vorige Art der Dinge gehört.

Anmerkung.

§. 2. Eine Linie, sie mag verlängert oder verkürzet werden, bleibt doch noch eine Linie; die Zahl 7 ist noch eine Zahl, man mag davon oder dazu thun; desgleichen die Kraft einer Feder in einer Uhr bleibt eine Kraft, sie seye gleich stärker oder schwächer, u. s. w. Hingegen kan ein mathematisches Punct weder grösser noch kleiner seyn, darum es auch keine Grösse hat. Man begreift also unter den Grössen, Zahlen, Linien, Flächen, Körper, Kräften, Zeiten, Geschwindigkeiten, u. s. w.

Die 2. Erklärung.

§. 3. Eine Gleichung oder Aequation wird genennet, wenn eine Grösse auf zweyerley Art ausgedrukt wird.

Anmerkung.

§. 4. Als, man kan die Zahl 10 ausdrucken, als seye sie die Summe von 7 und 3, ingleichem als den Unterschied zwischen 12 und 2. Wenn ich denn spreche: die Summe von 7 und 3 ist gleich dem Unterschied von 12 und 2, oder, wie unten (§. 16.) vorkommen wird, $7 + 3 = 12 - 2$: so habe ich eine Gleichung.

Die 3. Erklärung.

§. 5. Die Algebra ist eine Wissenschaft aus bekannten unbekannte Grössen vermittelst Gleichungen durch Rechnen zu finden.

Der 1. Zusatz.

§. 6. Es ist demnach die Algebra nur in der Art zu rechnen, nemlich durch Gleichungen von der gemeinen Rechenkunst unterschieden. Und ein jeder, der sich an die Algebram macht, muß vorher das gemeine Rechnen verstehen.

Der 2. Zusatz.

§. 7. Es ist ferner klar, daß man bey einer jeden vorgegebenen algebraischen Aufgabe sich vor allen Dingen um eine Gleichung bekümmern müsse.

Der 3. Zusatz.

§. 8. Eben so erhellet, da in einer jeden solchen Aufgabe bekannte und unbekannte Grössen vorkommen (§. 5.), daß man entweder eine bekannte oder unbekannte auf zweyerley Art ausdrucken müsse. (§. 3.)

Anmerkung.

§. 9. Die Erfahrung wird uns bald lehren, wie nützlich es seye, an statt der Zahlen allgemeine Zeichen oder Buchstaben zu brauchen, ob es gleich in der Algebra nicht unumgänglich nöthig ist. Dahero müssen wir, ehe wir die Algebra selber vor die Hand nehmen, vorhero die Buchstabenrechenkunst uns bekannt machen.

Die 4. Erklärung.

§. 10. **Die Buchstabenrechenkunst ist eine Wissenschaft, an statt der gewöhnlichen Ziffern mit allgemeinen Zeichen zu rechnen.**

Anmerkung.

§. 11. Damit man das Gedächtnis nicht mit neuen Zeichen beschweren dörfe, bedienet man sich der gewöhnlichen kleinen lateinischen so genannten Cursivbuchstaben, die um deswillen allgemeine Zeichen heissen, weil man alles damit bezeichnen kan, als z. E. *a* kan eine jede Zahl, als 5, 7, 10, 1000, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, ꝛc. eine Linie, einen Körper, eine Kraft, eine Zeit, u. s. w. bedeuten. Man darf sich aber dabey nicht irre machen lassen, als ob man mit Dingen in der Buchstabenrechenkunst umgehe, davon man sich keinen Begrif machen könne, weil man ja nicht wisse, was *a*, *b*, ꝛc

bedeute, und wenn man lang wisse, wie man *a* und *b* addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren solle, so wisse man doch nicht, was man habe, wenn man fertig seye. Denn gleichwie man bey Erlernung des Einmaleins noch nicht weiß, ob 2mal 2 vier Ducaten, 4 Kreuzer, 4 Kühe, 4 Pferde, ꝛc. seyen, sondern zu frieden ist zu wissen, daß es 4 sind: so hat man bey Erlernung der Buchstabenrechnung auch nicht nöthig zu wissen, was *a*, *b*, *x*, ꝛc. bedeute; komt es hernach zur Ausübung, so wird es sich schon zeigen, was ein jeder Buchstabe vor eine Bedeutung habe, wie es sich bey dem Einmaleins in der Anwendung zeiget. Es hat also die Buchstabenrechnung vor der gemeinen diesen Vorzug, daß sie allgemeiner ist, und nicht nur Zahlen, sondern auch alle Grössen überhaupt berechnen lehret. Anderer Vorzüge dermalen zu geschweigen, die sich unten bey der Anwendung handgreiflich zeigen werden.

Der 1. willkührliche Satz.

§. 12. **Die bekannten Grössen werden mit den ersten Buchstaben *a*, *b*, *c*, ꝛc. die unbekannten mit den lezten *x*, *y*, *z* benennet.**

Die 1. Anmerkung.

§. 13. Weil man in der algebraischen Rechnung beständig Acht auf die bekannten und unbekannten Grössen haben muß; so war es nöthig, solche von einander zu unterscheiden; und, damit man dieser Zeichen gewohnt werde, behält man immer den gemeldeten Unterschied der Buchstaben.

Die 2. Anmerkung.

§. 14. Es verstehet sich von selbsten, daß in einem Exempel einerley Buchstaben nur einerley Grössen andeuten müs-

müssen; als, wenn *a* die Summe zweyer Zahlen, eine gewisse Linie, ein gewisses Gewicht, ꝛc. bedeutet: so muß es im ganzen Exempel keine andere Bedeutung haben.

Die 3. Anmerkung.

§. 15. Eben so muß man zwey Grössen, da eine durch die andere ausgedrukt werden kan, nicht mit zweyerley Buchstaben benennen, als wenn eine nochmal so gros als die andere ist, die schon *a* heißt, muß sie nicht *b*, sondern 2 *a*, u. s. w. heissen, und wenn eine *b* heißt, und die andere um 3 mehr ist, muß sie *b* + 3 heissen.

Der 2. willkührliche Satz.

§ 16. Das Zeichen der Addition ist +, so mit plus ausgesprochen wird, als *a* + *b*, das heißt *a* plus *b*, das ist, *b* solle zu *a* addirt werden; hingegen ist das Zeichen der Subtraction —, so minus ausgesprochen wird, als *a*—*d* heißt *a* minus *d*, das ist, *d* solle von *a* subtrahirt werden.

Der 3. willkührliche Satz.

§. 17. Wenn Buchstaben sollen multipliciret werden, so setzet man sie nur zusammen, als *ab* bedeutet, *a* soll mit *b* multipliciret seyn. Da dieses bey Zahlen eine Verwirrung machen könnte, so setzt man ein Strichlein, oder einen Punct, oder ein Andreascreutz ⨯ darzwischen, als 3, 5, oder 3. 5. oder 3 ⨯ 5, welches auch in gewissen Fällen bey den Buchstaben zu geschehen pfleget.

Zusatz.

§. 18. Es ist aus der gemeinen Rechenkunst be-

kannt, daß, wenn ein Product mit einem Factor dividirt wird, so komt der andere Factor heraus, dahero wenn $a\,b$ mit a dividirt wird, komt b, das ist, wenn der Divisor in dem Dividendo vorhanden ist, wird er nur weggenommen, so bleibt der Quotient; als b in $c\,b\,d$ dividirt, gibt $c\,d$.

Der 4. willkührliche Satz.

§. 19. Wenn angezeiget werden soll, daß mehrere Buchstaben mit einem sollen multipliciret werden, so schliesset man die mehrere nur in zwey Klammeren ein, und verfahret wie §. 17. gemeldet. Als wenn $a + b - c$ mit d multiplicirt werden soll, stehet es also: $(a + b - c)\,d$ oder $(a + b - c), d$ oder $(a + b - c).\,d$ oder $(a + b - c) \times d$. Sollen aber mehrere mit mehrern multiplicirt werden, so schliesset man beyde mit oder ohne darzwischen gesetzte Zeichen ein, als: $(a - x + d)\,(b + c - f)$ oder $(a - x + d) \times (b + c - f)$ u. s. w.

Anmerkung.

§. 20. Das Product aus $a + b - c$ in d könnte wohl nach §. 17. also gezeichnet werden, $a\,d + b\,d - c\,d$; allein es gibt Fälle, da man von der Zeichnung nach §. 19. Vortheile hat, welches sich unten zeigen wird, dahero muß man sich diese auch wohl bekannt machen, und, wenn einem z. E. $a\,c + b\,c$ vorkomt, wissen, daß man es auch $(a + b)\,c$ zeichnen könne.

Der 5. willkührliche Satz.

§. 21. Die Division wird also gezeichnet, daß

daß der Divisor unter den Dividendum gesetzt wird, wie ein Bruch oder hinter denselben und zwey Puncte darzwischen, als: $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ bedeutet, a soll mit b dividiret werden. Sollen aber mehrere mit einem oder mehrern Buchstaben dividiret werden, werden sie wie bey dem multipliciren eingeschlossen und zwey Puncte darzwischen gesetzt, oder in Gestalt des Bruchs, daß der Strich unter alle Buchstaben gezogen wird, die dividiret werden sollen, als: $(a + b - c) : d$ oder $(a + b - c) : (d + g)$ oder $\frac{a + b - c}{d}$ oder $\frac{a + b - c}{d + g}$

Die 5. Erklårung.

§. 22. Die Gróssen, die das Zeichen + haben, werden positive; die aber das Zeichen — haben, negative Gróssen genennet.

Anmerkung.

§. 23. Es erleichtert die Buchstabenrechenkunst ungemein, wenn man sich den rechten Begrif von den positiven und negativen Gróssen macht, welches sich am leichtesten durch Exempel thun låsset. Wann ich nichts habe, und soll doch 5 fl. bezahlen, so ist solches nicht móglich, weil von nichts 5 fl. nicht abgezogen werden kónnen, darum kommen die 5 fl. mit dem Zeichen — 5 fl. also ist in diesem Fall eine negative Gróſſe eben so viel, als eine Schuld, und hingegen eine positive ein Kapital. Eben so, wenn ich von hier gegen Frankfurt zu 10 Meilen reise, und 4 wieder

 zurük,

zurük, so müssen die 4 von 10 abgezogen werden, wenn ich wissen will, wie weit ich von hier seye; sage ich aber, ich seye 15 Meilen zurük gegangen, so solten zwar auch diese 15 von 10 abgezogen werden; da es aber nicht geschehen kan, sondern nur 10, so müssen die übrige 5 gezeichnet werden — 5, das ist, 5 Meilen von dem Ort meines Aufenthalts in Absicht auf Frankfurt zurük. Wenn ich demnach sage, die Sonne seye — 5 Grad unter dem Horizont, so heißt es eben so viel, als + 5 Grad über demselben, so ist auch — 3 Stunden Nachmittag + 3 Stunden Vormittag. Hieraus erhellet nun genugsam, daß die positiven und negativen Grössen gar nicht von verschiedener Natur oder heterogen seyn, sondern daß, weil sie in besonderer Relation auf ein gewisses Ding betrachtet werden, nur eines das andere aufhebt. Als 5 fl. bleiben, was sie sind, sie mögen Schulden oder Kapital seyn; sind sie Schulden, so sind sie in Relation auf mich negativ, in Absicht des Glaubigers aber positiv. Wenn ich zwischen zweyen Städten A und B bin, und ich sage, ich reise — 3 Meilen gegen A, so sind es zwar 3 Meilen, sie gehen aber nicht gegen A, sondern gegen B, und sind demnach gegen A negativ, gegen B aber positiv. Auf diese Art wird sich verstehen lassen, was das zu bedeuten habe, wenn ich eine Perpendicularlinie vor mir hätte, und würde mir aufgegeben, ich solte algebraisch finden, wie weit ein gewisses Punct zur rechten Hand davon entfernet wäre, und ich fände, es wäre — 4 Schuh, daß solches Punct nicht zur Rechten der Linie, sondern zur Linken seye. Vielleicht werden sich die Anfänger die positiven Grössen am besten unter Kapitalien, die negativen unter Schulden oder einem Mangel in Absicht auf das, so davon subtrahiret werden solte, vorstellen können.

Der 6. willkührliche Satz.

§. 24. Wenn man anzeigen soll, daß zwey Grössen einander gleich seyn, so hat man dieses Zeichen = oder bey einigen Mathematicis ∝, als 5 = 3 + 2 heißt 5 ist äqual 3 + 2. Daß eine grösser seye als die andere, wird gezeichnet > kleiner aber < als 8 > 5 heißt 8 ist grösser als 5, hingegen 3 < 4, 3 ist kleiner als 4.

Der 1. Grundsatz.

§. 25. Positive Grössen zu positiven Grössen addirt, geben positive; hingegen negative zu negativen, geben negative. Als + 7 und + 3 = + 10, — 5 und — 8 = — 13.

Der 2. Grundsatz.

§. 26. Wenn gleich grosse positive und negative Grössen zusammen addirt werden, heben sie einander auf, oder geben nichts, als + 7 — 7 = 0.

Zusatz.

§. 27. Wenn demnach ungleiche positive und negative Grössen addirt werden, so macht die kleinere von der grösseren so viel zu nichts, als sie selber ist, und das übrige bleibt. Ist also die grössere positiv, so bleibt eine positive; ist sie aber negativ, so bleibt eine negative übrig, als + 9 zu — 3 addirt, gibt + 6, und — 8 zu + 4 addirt, gibt — 4.

Der 3. Grundsatz.

§. 28. Eine kleinere positive von einer grössern positiven Grösse abgezogen, läßt eine positive, und eine kleinere negative von einer grössern negativen läßt auch eine negative übrig. Als von + 15 abgezogen + 7, bleibt + 8, hingegen von — 13 abgezogen — 5, bleibt — 8.

Der 4. Grundsatz.

§. 29. Wenn eine positive Grösse subtrahirt wird, so wird die Grösse, von der sie subtrahirt wird, um so viel weniger, als von + 12 abgezogen + 3, gibt + 9.

Der 1. Zusatz.

§. 30. Wenn also eine positive Grösse von einer negativen abgezogen werden soll, so wird der Mangel um so viel grösser. Als wenn ich — 5 habe, und solle + 3 noch davon abziehen, so bleibt erstlich der Mangel — 5, und 3 solle noch dazu weggethan werden, so steigt der Mangel auf 8 oder gibt — 8.

Der 2. Zusatz.

§. 31. Soll eine grössere positive Grösse von einer kleinern abgezogen werden, so kan nicht mehr, als die kleinere beträgt, abgezogen werden, und das übrige wird eine negative Grösse. Als von + 3 abgezogen + 5, gibt — 2. Denn wenn ich nur 3 fl. habe, und soll 5 bezahlen, bleibe ich 2 schuldig.

Der 3. Zusatz.

§. 32. Aus diesen zweyen Zusätzen erhellet, daß wenn eine positive Grösse abgezogen werden solle, es eben so viel ist, als ob sie zur negativen gemacht, und addirt würde.

Der 1. Lehrsatz.

§. 33. Wenn eine negative Grösse subtrahirt wird, so wird die, von welcher sie subtrahirt wird, um so viel grösser.

Beweiß.

Es soll von einer Grösse, die indessen *a* heissen mag, eine negative, nemlich $-b$ abgezogen werden, so stelle man sich vor, es werde zu *a* addirt *b*, und eben dieses *b* wieder subtrahirt, so bleibet das *a*, was es vorher gewesen, (§. 26.) und stehet also $a + b - b$, subtrahirt, oder nimmt man nun $-b$ weg, so muß $a + b$ übrig bleiben, folglich ist *a* um *b* vermehret worden. W. z. E.

Anmerkung.

§. 34. Dieses leichter zu begreiffen, so will ich setzen, ich hätte 12 fl. im Vermögen, wäre aber 12 fl. schuldig, so hätte ich eigentlich nichts, es würde aber die Schuld von 12 fl. subtrahirt oder aufgehoben, so blieben mir meine 12 fl. im Beutel, weil die aufgehobene Schuld vernichtet, und folglich nicht mehr bezahlt werden dürfte; und ist also eben so viel, als ob ich, durch Subtraction der Schuld, 12 fl. bekommen hätte.

Der 1. Zusatz.

§. 35. Wird also eine negative Grösse abgezogen, so ist es eben so viel, als würde sie addirt. Als — 2 von + 5 subtrahirt, gibt + 7.

Der 2. Zusatz.

§. 36. Wenn eine grössere negative Grösse von einer kleinern negativen abgezogen werden soll, so kan nicht mehr abgezogen werden, als die kleinere selber ist, und das übrige wird positiv, als — 10 von — 7 gibt + 3. Denn es ist eben so viel, als ich wäre 7 fl. schuldig, und jemand machte mir eine Schuld von 10 fl. zu nichts, so bliebe mir noch 3 fl. gut stehen.

Der 3. Zusatz.

§. 37. Hieraus erhellet, daß, wenn eine negative Grösse abgezogen werden soll, es eben so viel sey, als wenn sie in eine positive verwandelt und addirt würde.

Der 2. Lehrsatz.

§. 38. Wann mit einer positiven Grösse multiplicirt wird, so ist es eben so viel, als die zu multiplicirende Grösse werde so vielmal addirt, als die positive Grösse Einheiten hat; wird aber mit einer negativen multiplicirt, so wird die zu multiplicirende so vielmal subtrahirt.

Beweiß.

Da die zu multiplicirende Grösse so vielmal genommen

nommen wird, als der Multiplicator Einheiten hat; so ist klar, daß wenn der Multiplicator positiv ist, auch die multiplicirende Grösse wirklich etlichmal zu sich selbst addiret werde. Ist aber der Multiplicator negativ, so muß zwar der Multiplicandus auch so vielmal genommen werden, als der Multiplicator Einheiten hatte, aber negativ, das ist, abgezogen werden, folglich ist es eben so viel, als ob der Multiplicandus so vielmal abgezogen würde, als der Multiplicator Einheiten hat. W. z. E.

Wäre die Zahl, mit der man multiplicirt, keine ganze Zahl, z. E. solte man 7 mit $\frac{3}{4}$ multipliciren, so erhellet, daß dieses zwar nicht heißt, die 7 etlichemal zu sich selbst addiren, aber daß doch niemand den Ausdruk undeutlich finden wird: die 7; $\frac{3}{4}$mal nehmen, das ist, sie so oft nehmen, so oft 1 in $\frac{3}{4}$ enthalten ist; es ist aber in $\frac{3}{4}$ die 1 nicht ganz, sondern nur $\frac{3}{4}$mal enthalten.

Solte man 7 mit $-\frac{3}{4}$ multipliciren, so hiesse dieses die 7 so oft nehmen, wie oft 1 in $\frac{3}{4}$ enthalten ist. Es ist aber in $-\frac{3}{4}$ die Einheit $\frac{3}{4}$mal abgezogen oder gewöhnlicher zu reden, es sind $\frac{3}{4}$ der Einheit abgezogen, also soll man auch $\frac{3}{4}$ von der 7 abziehen, oder man erhält $-\frac{7 \cdot 3}{4} = -\frac{21}{4}$.

Der 1. Zusatz.

§. 39. Wird also $+a$ mit $+b$ multiplicirt, so gibt es $+ab$; denn soll die positive Grösse a etlichmal zu sich selber addirt werden, so muß sie positiv bleiben, (§. 25. §. 17. §. 38.); $-a$ aber mit $+b$ gibt $-ab$, weil eine negative Grösse etlichmal zu sich selber addirt, negativ bleibet. (§. 25. §. 17. §. 38.).

Der

Der 2. Zusatz.

§. 40. Wird $+ a$ mit $- b$ multiplicirt, so gibt es $- ab$, denn die positive Grösse a wird etlichmal subtrahirt, (§. 17. 29. 38.) $- a$ mit $- b$ gibt $+ ab$, weil die negative Grösse $- a$ etlichmal subtrahirt wird. (§. 35. §. 17. §. 38.).

Der 3. Zusatz.

§. 41. Folglich geben einerley Zeichen, ($+$ und $+$ desgleichen $-$ und $-$) im multipliciren $+$; verschiedene Zeichen aber, ($+$ und $-$) geben $-$ (§. 39. 40.).

Der 4. Zusatz.

§. 42. Wann das Product mit dem Multiplicator dividirt wird, so komt der Multiplicandus als Quotient heraus; Da nun

$$1.)\ \begin{array}{r} +a \\ +b \\ \hline +ab \end{array} \qquad 2.)\ \begin{array}{r} -a \\ +b \\ \hline -ab \end{array} \qquad 3.)\ \begin{array}{r} +a \\ -b \\ \hline -ab \end{array} \qquad 4.)\ \begin{array}{r} -a \\ -b \\ \hline +ab \end{array}$$

diese vier Fälle durch die Multiplication diese Producte bringen (§. 39. 40.), so muß im ersten Fall $+ ab$ mit $+ b$ dividirt $+ a$ geben, im 2 Fall $- ab$ mit $+ b$ geben $- a$, im 3ten Fall $- ab$ mit $- b$, geben $+ a$, nnd endlich im 4ten Fall $+ ab$ mit $- b$ heraus bringen $- a$, und folglich auch bey dem dividiren einerley Zeichen $+$, verschiedene aber $-$ geben.

Die

Die 1. Aufgabe.

§. 43. Einerley Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen zu addiren.

Auflösung und Beweiß.

1. Wenn sie einerley Zeichen haben, so zählet sie, wie in der gemeinen Rechenkunst, zusammen. (§. 25.).

2. Sind die Zeichen verschieden, so ziehet die kleinere von der grösseren ab, und gebet der Ueberbliebenen das Zeichen der grösseren, so habt ihr die Summe. (§. 27.) W. z. th. w.

Exempel.

$$\begin{array}{rrrrr} 5a & -3b & +4c & -7d & -3f \\ 2a & +3b & -5c & -2d & +6f \\ \hline 7a & & -c & -9d & +3f \end{array}$$

Anmerkung.

§. 44. Es ist von sich selbsten klar, daß, wenn verschiedene Buchstaben zusammen addirt werden sollen, solche mit ihren Zeichen nur neben einander gesetzt werden müssen. Als $+a$ zu $-3b$ addirt, gibt $+a-3b$; und $2a$ zu $+b$ addirt, gibt $2a+b$.

Die 2. Aufgabe.

§. 45. Einerley Grössen mit einerley oder verschiedenen Zeichen von einander zu subtrahiren.

Auf-

Auflösung und Beweiß.

Stellet euch vor, es haben die abzuziehende Grössen verkehrte Zeichen, nemlich an statt + stehe —, und an statt — stehe +, und addirt, wie §. 43. gelehrt worden, so habt ihr den Rest (§. 32. 35.). W. z. th. w.

Exempel.

$$
\begin{array}{l}
7a + 3b - 2c - 4f + 2g - 4x \\
3a - 2b - 4c - 2f + 4g + 3x \\
\hline
4a + 5b + 2c - 2f - 2g - 7x
\end{array}
$$

Anmerkung.

§. 46. Sollen ungleiche Buchstaben von einander subtrahirt werden, so setzet man nur die abzuziehende mit dem verkehrten Zeichen darneben, als $+b$ von $+a$ gibt $a-b$, $-b$ von $+a$ gibt $a+b$. (§. 32. 35.).

Die 3. Aufgabe.

§. 47. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen mit einander zu multipliciren.

Auflösung und Beweiß.

Multipliciret, wie in Zahlen, und setzet die Buchstaben aneinander, (§. 17.) nur merket, daß einerley Zeichen +, verschiedene aber — geben. (§. 41.).

Exem-

Exempel.

$$a+b-d \qquad\qquad 5a-2b-d$$
$$a-b-d \qquad\qquad 2a+3b-2d$$

$$-ad-bd+dd \qquad\qquad -4ad+10bd+2dd$$
$$-ab-bb+bd \qquad\qquad -3ab-6bb\;15bd$$
$$aa+ab-ad \qquad\qquad 10aa+ab-14ad$$

$$aa-2ad-bb+dd \qquad 10aa+11ab-12ad-6bb+bd+2dd$$

Die 4. Aufgabe.

§. 48. Grössen mit einerley und verschiedenen Zeichen mit einander zu dividiren.

Auflösung und Beweiß.

Lassen sich die Grössen dividiren, so dividiret, wie in Zahlen, und thut den oder die Buchstaben des Divisors von dem Dividendo, und behaltet den oder die übrigen zum Quotienten. (§. 18.). Kan die Division nicht wirklich geschehen, so verrichtet sie nur durch Zeichen. (§. 21.). Wobey noch zu merken, daß das unter sich Dividiren bey den Buchstaben viel bequemer.

Exempel.

1) $(a+b-d)\; aa-2ad-bb+dd\;(a-b-d$

$$aa+ab-ad$$

$$-ab-ad-bb+dd$$
$$-ab-bb+bd$$

$$-ad-bd+dd$$
$$-ad-bd+dd$$

$$0$$

 2) 2a

$$2)\ 2a+3b-2d)\ 10aa+11ab-12ad-6bb+bd+2dd\ (5a-2b-d$$
$$10aa+15ab-10ad$$
$$-4ab-2ad-6bb+bd+2dd$$
$$-4ab-6bb+4bd$$
$$-2ad-3bd+2dd$$
$$-2ad-3bd+2dd$$
$$0$$

$$3)\ a-b)\ aaa-bbb\ (aa+ab+bb$$
$$aaa-aab$$
$$+aab-6bbb$$
$$aab-abb$$
$$+abb-bbb$$
$$abb-bbb$$
$$0$$

$$4)\ c+d)\ cc-dd\ (c-d$$
$$cc+cd$$
$$-cd-dd$$
$$-cd-dd$$
$$0$$

Die 1. Anmerkung.

§. 49. Die Buchstaben haben keine Bedeutung von der Stelle, wie die Zahlen und $+ab$ gilt einerley, es mag vornen, hinten, oder in der Mitten stehen. Darum darf man sich hier an keine Ordnung binden, und man kan den Quo-

Quotient nehmen, wo man ihn findet, welches auch bey dem Subtrahiren des Products aus dem Quotienten in den Divisorem statt hat. Damit aber die Anfänger sehen, wie die Division geschehe, so wollen wir das erste Exempel etwas erläutern. Sprechet: a in aa hab ich a, (§. 18.) setzet a in die Stelle des Quotienten, und multipliciret damit den Divisorem $a + b - d$, so komt $aa + ab - ad$ (§ 47.) setzet dieses unter den Dividendus, und ziehet es von demselben ab, so bleibt $- ab - ad - bb + dd$, wobey zu merken, weil $+ ab$ im Dividendo nicht zu finden, es nur mit verkehrtem Zeichen in den Rest komme. (§. 46.) Sprecht ferner: a in $- ab$ hab ich $- b$ (18. 42.), multipliciret $- b$ wieder mit dem Divisor, und ziehet vom Dividendus ab, so bleibet $- ad - bd + dd$. Wiederum a in $- ad$, gibt $- d$, $- d$ mit dem Divisor multipliciret und subtrahiret, so gehets auf. Gieng es nicht auf, so wäre es ein Zeichen, daß die Division nicht wirklich geschehen könnte, sondern nur in Zeichen zu verrichten seye. (§. 21.).

Die 2. Anmerkung.

§. 50. Es werden selten Exempel vorkommen, da man einen aus verschiedenen Gliedern bestehenden Dividendum mit einem Divisore; der auch aus mehrern Gliedern bestehet, wirklich dividiren kan; wann nicht der Dividendus vorher durch eine Multiplication entstanden: dahero sich ein Anfänger durch die geringe Schwierigkeit, die das Dividiren zu machen scheinet, nicht abschrecken lassen soll. Komt ein Exempel vor, da man vermuthet, es lasse sich wirklich dividiren, so komts auf Versuchen an, ob es sich thun lasse; will es nicht gehen, so richtet man sich in der Zeichnung nach §. 21.

Die 3. Anmerkung.

§. 51. Wenn der Divisor nur aus einem Glied bestehet, das entweder nur einen oder mehrere Buchstaben enthält, welche in allen Gliedern des Dividendi angetroffen werden, so streicht man den Divisorem nur aus den Gliedern des Dividendi weg, (§. 18.) als:

$$a)\ \frac{ab + 3ca - af}{b + 3c - f} \quad \Big| \quad ab)\ \frac{4abb - 5cab + dab}{4b - 5c + d}$$

Würde aber der Divisor in einem oder etlichen Gliedern des Dividendi nicht angetroffen, so müßte man da sich mit dem zeichnen behelfen, (§. 21.) als:

$$bc)\ \frac{aabc - 3fabc + dgxx}{aa - 3fa + \frac{dgxx}{bc}}$$

Die 4 Anmerkung.

§. 52. Damit man nicht glauben mögte, als ob die Buchstabenrechenkunst unvollständig seye, wenn nicht auch gezeiget würde, wie man die Brüche in Buchstaben behandlen und berechnen solle; so ist nur zu bemerken, daß darinn kein Unterschied seye von der gemeinen Rechenkunst, und wie man dort verfährt, so verfährt man auch hier in allen Stücken, nur daß man die Art zu addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, nach der Buchstabenrechenkunst in Acht nehme.

Die 6. Erklärung.

§. 53. Wenn eine Grösse mit ihr selber multipli-

tipliciret wird, so heisset das Product die andere Potenz oder Dignität derselben Grösse. Wird die andere Potenz wieder mit der ersten multipliciret, so komt die dritte Potenz heraus. Desgleichen, wenn die dritte Potenz nochmal mit der ersten multipliciret wird, so entstehet die vierte, und auf gleiche Weise die fünfte, sechste, ꝛc. Die Grösse selbsten, welche auf diese Art multipliciret worden, wird die erste Potenz oder die Wurzel genennet.

Die 1. Anmerkung.

§. 54. Wenn die Wurzel *a* genennet wird, so ist die zweyte Potenz *aa*, die dritte *aaa*, die vierte *aaaa*, die fünfte *aaaaa*, u. s. w. (§. 17.). Da aber diese Art zu schreiben so wol zum aussprechen als schreiben unbequem, so hat man eine geschiktere Art, die Potenzen zu schreiben, angenommen, wie §. 56. zu sehen.

Die 2. Anmerkung.

§. 55. Vor diesem pflegte man die andere Potenz quadratum oder censum zu nennen; die dritte cubum; die vierte quadrato quadratum oder censi censum; oder auch biquadratum; die fünfte surdesolidum, oder censicubum; die sechste surdesolidum secundum; die siebende censi censi censum, u. s. w. Da aber die neuere von Cartesio auf Keplers Anrathen angenommene Benennung viel schiklicher ist; so ist die alte ganz abgekommen, ausser, daß man noch sagt: quadratum, cubus, und biquadratum.

Der 7. willkührliche Satz.

§. 56. Wenn bey einem Buchstaben oder Zahl

soll angezeiget werden, zu der wievielten Potenz oder Dignität er erhoben worden, so schreibt man die Zahl oben zur Rechten daran, als: a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, ꝛc. oder wenn man noch nicht bestimmen will, welche Potenz es eigentlich sey, einen von den Buchstaben *m*, *n*, *r*, *s*, *t*, als x^m, b^n, d^r, die Wurzel aber selbst wird entweder nur blos hingesetzt als *a*, oder bekomt einen Einser, als a^1, und diese oben angehängte Buchstaben oder Zahlen heissen Exponenten der Dignität oder Potenz.

Der 1. Zusatz.

§. 57. Man wird leicht begreiffen, daß ein grosser Unterschied unter $2a$ und a^2, unter $3a$ und a^3 ꝛc. seye: denn gesetzt, *a* bedeute 5, so ist $2a$ so viel als 2mal 5, das ist 10, a^2 aber ist so viel als 5mal 5, das ist 25, u. s. w.

Der 2. Zusatz.

§. 58. Wenn Buchstaben mit einander sollen multipliciret werden, so werden sie nur aneinander gesetzt (§. 17.), wenn also *aa* mit *aaa* multipliciret wird, so gibt es *aaaaa*; da aber *aa* so viel als a^2, und a^3 so viel als *aaa*, so erhellet, daß a^2 mit a^3 multipliciret a^5 geben müsse, und überhaupt die Exponenten nur addirt werden dürfen, wenn man Potenzen von einerley Wurzel multipliciren soll, als:

a^4	a^5	x^m	b^n	c^r	d^n	x^{n-1}
a^3	a	x^n	b^n	c	d^2	x
a^7	a^6	x^{m+n}	b^{2n}	c^{r+1}	d^{n+2}	x^n

Der

Der 3. Zusatz.

§. 59. Eben so ist klar, weil die Buchstaben bey dem dividiren weggenommen werden (§ 18.), daß der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividendi nur abgezogen werden dörfe, wenn man Potenzen von einerley Wurzel dividiren will, als:

$$\frac{x^5}{x^2} \quad \frac{x^5}{x} \quad \frac{a^m}{a^n} \quad \frac{b^{m+n}}{b^n} \quad \frac{c^n}{c} \quad \frac{c^{m-1}}{c}$$

$$x^3 \quad x^4 \quad a^{m-n} \quad b^m \quad c^{n-1} \quad c^{m-2}$$

desgleichen $a+ma+m^2a$ in $a^2+m^2a^2+m^4a^2$ dividiret, gibt $a - ma + m^2a$ (§. 48.).

Der 4. Zusatz.

§ 60. Weil a^2 in a^2 dividirt eines gibt, a^2 aber in a^2 dividirt a^0 geschrieben werden muß, (§. 59.), so ist $a^0 = 1$, das ist, wenn der Exponent 0 ist, so bedeutet es eins.

Der 5. Zusatz.

§. 61. Wenn der Exponent negativ ist, ist es eben so viel, als wäre er von 0 abgezogen: wo aber der Exponent 0 ist, ist der Buchstabe eins, (60.) und das Subtrahiren des Exponenten zeigt dividiren an (§. 59.), also ist $a^{-2} = a\frac{1}{2}$, $a^{-3} = a\frac{1}{3}$, $a^{-m} = a\frac{1}{m}$ ꝛc. denn a^{-2} ist eben so viel als a^0 dividiret mit a^2 (§. 59.); a^0 aber ist $= 1$, dahero $a^{-2} = \frac{1}{a2}$, als 4^{-3} ist $\frac{1}{64}$, 3^{-2} ist $\frac{1}{9}$ ꝛc.

Der 6. Zusatz.

§. 62. Weil eine jede Grösse in sich selbst multipliciret werden kan, und das Product wieder mit derselben Grösse, so kan auch jede Potenz als eine Wurzel angesen werden (§. 53.), und wenn sie mit sich selbst multipliciret wird, wird ihr Exponent zu sich selbst addirt (§. 58.), das ist, doppelt genommen, wird damit die Potenz die zur Wurzel angenommen worden, nochmal multipliciret, so wird auch ihr Exponent addirt, das ist, dreymal genommen, u. s. w. dahero, wenn eine Potenz zu einer höhern Potenz erhoben werden soll, darf nur ihr Exponent mit der Zahl multipliciret werden, zu welcher Potenz sie soll erhoben werden, als:

Wurzel	a^3	a^5	a^m	a^r
Zur Potenz	2	3	n	4
	a^6	a^{15}	a^{mn}	a^{4r}

Der 7. Zusatz.

§. 63. Weil durch die Multiplication des Exponenten eine Potenz zu einer höhern erhoben wird, so muß durch die Division des Exponenten die Wurzel ausgezogen werden, weil die Division der Rukweg der Multiplication ist, als:

Potenz	a^6	x^{12}	x^m	x^m	x^3	a
Wurzel	2	3	4	n	2	3
	a^3	x^4	$x^{m:4}$	$x^{m:n}$	$x^{3:2}$	$a^{1:3}$

Der

Die 7. Erklärung.

§. 64. Die Grössen, aus welchen die Wurzel nicht genau gezogen werden kan, werden irrational genennet, als die Wurzel aus 7.

Der 8. willkührliche Satz.

§. 65. Wenn man anzeigen soll, daß aus einer Grösse die Wurzel gezogen werden soll, braucht man dieses Zeichen $\sqrt{}$, und so es die dritte, vierte, ꝛc. Wurzel ist, schreibet man die Zahl oben drein; bey der zweyten Wurzel aber wird meistens keine Zahl in das Wurzelzeichen gesetzt, als: $\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{10}$ $\sqrt[5]{a^3}$ $\sqrt[m]{x^n}$ bestehet die Grösse aus vielen Gliedern, so schließt man sie entweder mit Klammern ein, oder ziehet einen Strich darüber, als: $\sqrt[m]{aa + bb}$ oder $\sqrt[n]{}(aa + bb)$, $\sqrt{xx - 2cx}$, $\sqrt{}(dx^2 + abx)$.

Der 1. Zusatz.

§. 66. Weil $\sqrt[3]{a^2} = a^{2:3}$ und $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§. 63. 65.) so kan man brauchen, welches man will, und von welchem man Vortheil hat, welches sich unten zeigen wird.

Und weil es bey den Irrationalgrössen auf dem Exponenten ankomt, der ein Bruch ist, so können zwey Irrationalgrössen zu einerley Benennung gebracht werden, wenn ihre Exponenten, wie die Brüche in der gemeinen Rechenkunst, zu einerley Benennung gebracht

werden, als: $\sqrt[3]{a^4}$ und $\sqrt[4]{a^3}$, gelten $a^{4:3}$ und $a^{3:4}$, sind auch $a^{16:12}$ und $a^{9:12}$ oder $\sqrt[12]{a^{16}}$ und $\sqrt[12]{a^9}$, desgleichen $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{x^s}$ gibt $\sqrt[rm]{x^{nr}}$ und $\sqrt[rm]{x^{sm}}$.

Der 2. Zusatz.

§. 67. Einen Bruch $\frac{m}{n}$ auf das Quadrat erheben heißt, ihn mit sich multipliciren, oder das Quadrat ist $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m.m}{n.n}$, nämlich ein Bruch, dessen Zähler und Nenner Quadrate des vorigen Zählers und Nenners sind. Umgekehrt aus dem Bruche $\frac{m^2}{n^2}$ die Quadratwurzel ziehen, heißt einen Bruch machen, dessen Zähler und Nenner die Quadratwurzeln jenes Zählers und Nenners sind, oder es ist $\sqrt{\frac{m^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{n^2}} = \frac{m}{n}$, denn wenn man $\frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{n^2}}$ quadirt, so kömt nach dieses Zusatzes ersten Theile $\frac{m^2}{n^2}$ heraus.

So ist $(\frac{2}{3})^2 = \frac{2.2}{3.3} = \frac{4}{9}$; und $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$;

Die-

Dieses dient manchmal, eine Irrationalzahl bequemer auszudrucken. Z. E. $\sqrt{\frac{7}{10000}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{7}}{100}$.

Eben so ist $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{m^3}{n^3}$, und $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}$,

z. E. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{64}{125}$ und $\sqrt[3]{\frac{8}{343}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{343}}$ $= \frac{2}{7}$. Eben so $\sqrt[3]{\frac{7}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{10}$.

Ueberhaupt erhellet, daß einen Bruch auf eine Potenz erheben heißt: seinen Zähler und Nenner auf diese Potenz erheben; daß $\left(\frac{b}{a}\right)^e = \frac{b^e}{a^e}$ und eben so aus einem Bruche eine gewisse Wurzel ziehen heißt; solche aus Zähler und Nenner ziehen, oder daß $\sqrt[e]{\frac{b}{a}}$ $= \frac{\sqrt[e]{b}}{\sqrt[e]{a}}$.

Anmerkung.

§. 68. Die Irrationalgrössen zu berechnen, solten noch mehrere Aufgaben angebracht werden; weilen sie aber von Anfang etwas schwer scheinen, so ist es besser, sie werden

den versparet bis dahin, wo sie nöthig sind, und gleich angewendet werden. Siehe unten §. 161 - 168. Wir verlassen daher die Buchstabenrechenkunst, und gehen zur Algebra.

Die 5. Aufgabe.

§. 69. Eine Aufgabe algebraisch aufzulösen.

Auflösung.

Bey einer jeden Aufgabe, die algebraisch aufgelöset werden soll, komt es auf drey Stücke an: 1) Die Benennung (§. 12 13. 14. 15.) 2) Auf eine Aequation, (§. 7. 3.). 3) Auf die Reduction, da man der unbekannten Grösse Wehrt findet; indem man sie auf eine Seite des Aequalzeichens bringt, und auf die andere lauter bekannte. Daher verfähret man also:

1) Die unbekannten Grössen benennet man mit x, y, z; die bekannte aber mit a, b, c, &c. (§. 12.), oder sind es Zahlen, so können sie als Zahlen bleiben.

2) Man sucht aus den Umständen der Aufgabe eine Aequation, indem man eine Grösse auf zweyerley Art ausdrukt, (§. 3.).

3) Wenn die Gleichung gemacht, und auf beyden Seiten bekannte und unbekannte Grössen unter einander stehen, so muß die unbekannte auf einer Seite weggeschaft werden, damit sie nur auf einer einigen Seiten angetroffen werde; doch so, daß es immer eine Gleichheit bleibe. Ist dieses geschehen, so muß die unbekannte von den bekannten, die noch bey ihr stehen, befreyet werden, bis sie ganz allein stehet. Es geschiehet aber das Wegschaffen, wenn man das Addirte subtrahirt, das Subtrahirte addirt, das Multiplicirte dividirt, und

das

das Dividirte multiplicirt, desgleichen aus den Dignitäten Wurzeln ziehet, und die Wurzeln zu Dignitäten erhebet. Doch allezeit so, daß, um die Aequation zu erhalten, was auf der einen Seite geschiehet, auch auf der anderen geschehen muß. Wenn denn endlich die unbekannte allein auf einer, und die bekannten auf der anderen Seite stehen, so weiß man, wem die unbekannte gleich ist. Welches zu finden war.

Die 1. Anmerkung.

§. 70. Bey der Benennung kan man sich eine Aufgabe leicht oder schwer aufzulösen machen, davon sich zwar wohl Regeln geben liessen; allein sie werden sich leichter durch Exempel bekannt machen lassen. Darum soll hier ausser dem, was §. 12. gesagt worden, nichts weiter gesagt werden, als daß man sich bemühen soll, so wenig unbekannte Grössen in die Aequation zu bringen, als nur möglich. Die Benennung, und die aus derselben und den Umständen des Exempels zu machende Aequation läßt sich am leichtesten dadurch begreiffen, wenn man die Aufgabe aus der gemeinen in die algebraische Sprache übersetzet, welches durch folgendes Exempel deutlich werden kan. Ein Kaufmann hat eine Summe Geldes, gewinnt damit jährlich einen Drittel davon, braucht aber jährlich 1000 fl. in seine Haushaltung; noch dreyen Jahren ist er nochmal so reich als vorher, wie viel hat er anfänglich gehabt?

In Teutscher Sprach.	In Algebraischer Sprach.
Ein Kaufmann hat eine gewisse Summe Geldes, die man wissen mögte,	x
von welcher er jährlich 1000 fl. ausgiebt,	$x - 1000$

zu

zu dem übrigen gewinnt er noch den dritten Theil.	$x-1000+\frac{x-1000}{3}$ oder $\frac{4x-4000}{3}$
Im zweyten Jahr gibt er wieder aus 1000 fl.	$\frac{4x-4000}{3}-1000$ oder $\frac{4x-7000}{3}$
Den Rest vermehrt er um den dritten Theil.	$\frac{4x-7000}{3}+\frac{4x-7000}{9}$ oder $\frac{16x-28000}{9}$
Im dritten Jahr gibt er wieder 1000 fl. aus,	$\frac{16x-28000}{9}-1000$ oder $\frac{16x-37000}{9}$
und den Rest vermehrt er um den dritten Theil,	$\frac{16x-37000}{9}+\frac{16x-37000}{27}$ oder $\frac{64x-148000}{27}$
und darauf wird er nochmal so reich als vorher.	$\frac{64x-148000}{27}=2x$

Man wird keine Schwierigkeit machen zu begreiffen, wie $x-1000+\frac{x-1000}{3}$ zu $\frac{4x-4000}{3}$ worden, da nur

$x-$

$x - 1000$ auch zu Drittel gemacht worden, $\frac{3x - 3000}{3}$ folglich $\frac{3x - 3000}{3} + \frac{x - 1000}{3} = \frac{4x - 4000}{3}$, und so auch in den folgenden.

Die 2. Anmerkung.

§. 71. Die Reduction lässet sich von einem Anfänger nicht leichter begreiffen, als wenn er sich eine Aequation als eine Wage vorstellet, die inne stehet, in deren beyden Schalen gezeichnete Gewichtsteine und Stücker Waare von unbekanntem Gewicht unter einander liegen, da man sich nämlich die bekannten Grössen oder Zahlen als gezeichnetes Gewicht, die unbekannten aber als Stücker Waare, deren Gewicht man nicht weiß, und den Waagbalken durch das Zeichen $=$ vorstellet. Z. E. Die vorher §. 70. gefundene Aequation $\frac{64x}{27} - \frac{148000}{27} = 2x$ hies nach dieser Vorstellung also: in einer Wagschale liegen von einer Waare (x) 64 Stücke; doch nur von jedem der 27ste Theil, weniger $\frac{148000}{27}$ an gezeichneten Gewichtsteinen; in der andern Wagschale von der Waare 2 ganze Stücke. Nun wolte ich gern wissen, wie viel ein solches Stück Waare wäge, welches ich erführe, wenn ein solches Stück ganz allein in der einen Wagschale läge, und in der andern lauter Gewichtsteine, dabey aber die Wage noch immer inne stünde. Damit ich nun dieses erfahre, so will ich so lang aus einer Wagschale so viel Gewichtsteine oder Stücker Waaren nehmen, als aus der andern, oder in eine so viel legen, als in die

die andere, oder das, was in jeder Schale liegt, verdoppeln, oder sonst vervielfältigen oder halbiren, oder sonst in gleiche Theile theilen, bis ich in einer Wagschale das Stück Waare alleine habe, und in der andern die Gewichtsteine: denn wenn ich immer in einer Wagschale vor nehme, was in der anderen, so wird die Wage immer inne stehen bleiben.

$$\frac{64x}{27} - \frac{148000}{27} = 2x$$

Hier will ich machen, daß ich keine Stücker Waare mehr habe, die nur der 27ste Theil sind, sondern ich will ganze haben, darum will ich ein jedes 27mal nehmen, oder das ganze Gewicht in jeder Schale 27mal vervielfältigen, das ist, mit 27 multipliciren: denn diesen Vortheil muß man fast immer brauchen, daß man vor allen Dingen suche, die Brüche wegzuschaffen.

$$\frac{64x}{27} - \frac{148000}{27} = 2x$$

Multipl. 27)

$$64x - 148000 = 54x$$

Man wird sich nicht wundern, daß $\frac{64}{27}x$ mit 27 multiplicirt $64x$ gebe: denn $\frac{1}{27}$ mit 27 multiplicirt, gibt $\frac{27}{27}$ oder eins, $\frac{2}{27}$ mit 27 gibt 2mal $\frac{27}{27}$ oder 2, u. s. w. Ueberhaupt, wenn ein Bruch mit seinem Nenner multipliciret wird, so ist es eben so viel, als würde nur solcher Nenner weggelassen, und der Zähler bliebe allein stehen.

In einer Schale fehlen nun 148000, die will ich ersetzen, und in die andere auch so viel thun, das ist, 148000 addiren:

$$64x - 148000 = 54x$$

addire 148000 148000 (§. 26.).

$$64x = 54x + 148000$$

Aus

Aus beyden Schalen will ich 54 Stücker Waare (x) wegnehmen: $64x = 54x + 148000$
subtrahire $54x = 54x$

$$10x = 148000$$

Da nun in einer Schale 10 Stücker Waare liegen, in der andern an Gewichtsteinen 148000, so will ich nur ein Stück Waare behalten, und von 148000 auch nur den zehenden Theil, das ist, mit 10 dividiren, so wird meine Wage noch inne stehen.

$$10x = 148000$$

$$x = 14800$$

Und jetzt weiß ich, was mein Stück Waare wiegt.

Der 3. Lehrsatz.

§ 72. Wenn die Aufgabe soll determiniret seyn, müssen so viel Aequationen gemacht werden, als unbekannte Grössen vorhanden.

Beweiß.

Gesetzt, es wären in einer Aequation zwey unbekannte Grössen, so würden entweder beyde auf eine Seite allein kommen, oder nur eine, und die andere auf die andere Seite. Im ersten Fall würde man wohl wissen, wie viel die beyde mit einander, aber nicht was jede besonders betrüge; im andern Fall aber würde bekannt werden, daß eine unbekannte einer gewissen bekannten und einer unbekannten gleich, wodurch nichts determinirtes herauskäme. Dahero können in einer Aequation nicht zwey unbekannte Grössen seyn, sondern jede unbekannte Grösse fordert eine eigene Aequation, wenn sie determiniret

seyn soll, welches eben so leicht von mehreren unbekannten einzusehen, w. z. E.

Zusatz.

§. 73. Weilen aber gleichwohl bey mehreren Aequationen die unbekannten Grössen nicht determiniret werden, wenn nicht eine Aequation daraus gemacht wird, so muß man suchen, eine Aequation zu bekommen, welches durch Exempel klar werden wird.

Die 6. Aufgabe.

§. 74. Alexander der Grosse sprach zu seinen Generalen: Ich bin zwey Jahr älter als Ephestion; Clytus sagte: Ich bin vier Jahr älter als ihr beyde; Calisthenes setzte hinzu: Mein Vatter ist 96 Jahr alt, und so alt als alle drey, wie alt war jeder?

Auflösung.

Wenn wir Ephestions Alter wüßten, würde alles gethan seyn; weil aber dieses unbekannt, so wollen wirs nennen $= x$

Alexander ist 2 Jahr älter $= x + 2$

Beyde zusammen $2x + 2$

Clytus ist 4 Jahr älter als diese, also $2x + 2 + 4$

Aller dreyen Alter addirt:

$$\begin{array}{lcr} \text{Ephest.} & = & x \\ \text{Alexand.} & = & x + 2 \\ \text{Clyt.} & = & 2x + 6 \\ \hline & & 4x + 8 \end{array}$$

Die-

Dieses beträgt das Alter von Calisthenis Vatter, der 96 Jahr alt, dahero

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x + 8 = 96 \\
8 \text{ Subtr.}) & 8 8 \\
\hline
 & 4x = 88 \\
4 \text{ Divid.}) & 4 4 \\
\hline
 & x = 22.
\end{array}
$$

Prob:

Ephest. = 22
Alexand. = 24
Clyt. = 50

96 das Alter von Calisthenis Vatter.

Die 7. Aufgabe.

§. 75. Corydon und Mopsus streiten über die Anzahl ihrer Schafe; Corydon sagt: Gibst du mir eines von deinen, so habe ich nochmal so viel als du. Mopsus erwiedert: Gibst du mir eines von deinen, so habe ich so viel als du. Wie viel hat jeder gehabt?

Auflösung.

Corydon hat gehabt $= x$
Mopsus $= y$

bekomt Corydon eins, so hat er $x + 1$ und Mopsus eines weniger als vorher, das ist, $y - 1$; weil aber in diesem Fall Corydon nochmal so viel hat als Mopsus, so müssen des Mopsus seine ($y - 1$) doppelt genommen werden ($2y - 2$), so sind sie der Anzahl des Corydons gleich

$$x + 1 = 2y - 2$$

bekomt Mopsus eins, so hat er $y + 1$ und Corydon hingegen $x - 1$, und jetzt sollen beyde gleichviel haben, dahero

$$y + 1 = x - 1$$

Beyde Aequationen werden neben einander gesetzt,

$$x + 1 = 2y - 2 \qquad y + 1 = x - 1$$

weil aber beyde Aequationen zu einer gemacht werden müssen (§. 73.), kan solches nicht besser geschehen, als wenn man in beyden Aequationen eine unbekannte Zahl auf eine Seite bringt. Wir wollen x auf eine Seite bringen:

$$\begin{array}{lcccc|cccc} & x + 1 & = & 2y - 2 & & y + 1 & = & x - 1 & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ \text{Subtr.} & \hline & & & \text{Add.)} & \hline & & & \\ & x & = & 2y - 3 & & y + 2 & = & x & \end{array}$$

Wenn zwey Grössen, nämlich $2y - 3$ und $y + 2$ einer dritten x gleich sind, sind sie einander selber gleich, darum ist

$$\begin{array}{lccc} & 2y - 3 & = & y + 2 \\ \text{Add.)} & 3 & & 3 \\ \hline & 2y & = & y + 5 \\ \text{Subtr.)} & y & & y \\ \hline & y & = & 5. \end{array}$$

Nun weiß man, wie viel y beträgt, setzt man dessen Wehrt 5 in die obige Aequation $y + 2 = x$, so komt $5 + 2 = x$, das ist, $x = 7$.

Es hätte diese Aequation auch noch kürzer aufge-

löst

löst werden können, wenn beyde Aequationen von einander subtrahiret worden wären.

$$x + 1 = 2y - 2$$

Subtr.) $$x - 1 = y + 1$$

$$+ 2 = y - 3$$

Addire) $$3 \qquad 3$$

$$5 = y$$

Die 8. Aufgabe.

§. 76. Zwey Zahlen zu finden, die zusammen 253 ausmachen, eine aber um 79 grösser ist als die andere.

Auflösung.

Die eine seye $= x$
Die andere um 79 grösser $= x + 79$

Zusammen $2x + 79 = 253$
$79 \qquad 79$

Subtr.)

$2x = 174$
$2 \qquad 2$

Divid).

$x = 87$

Probe: eine ist 87
die andere 166

253

Diese Aufgabe läßt sich allgemein also auflösen:

Aus der Summe s und der Differenz d; von ein Paar Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die kleinere heisse X; so ist die grössere $X + d$; beyde zusammen $X + X + d, = 2x + d$. Also ist

$$2X + d = s$$

Subtr.) $$d = d$$

$$2X = s - d$$

mit $$2 = 2$$ dividirt

$$X = \frac{s - d}{2} = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d$$

folglich die grössere $= \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d + d = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d$

Die kleinere Zahl ist also, die halbe Summe weniger der halben Differenz; die grössere ist, die halbe Summe und die halbe Differenz zusammen addirt, welche Regel in vielen Fällen sehr nützlich zu gebrauchen ist. So ist im Exempel die kleinere $126\tfrac{1}{2} - 39\tfrac{1}{2}$, die grössere $126\tfrac{1}{2} + 39\tfrac{1}{2}$. Will man daher Summe und Differenz nach Gefallen annehmen, und daraus die Zahlen finden, so müssen beyde, Summe und Differenz, zugleich gerade oder zugleich ungerade seyn, wenn die gesuchten Zahlen ganze seyn sollen.

Die 9. Aufgabe.

§. 77. Eine Zahl zu finden, daß, wenn man 9 dazu addirt, und die Summe mit 5 dividirt, 13 heraus komme.

Die Auflösung.

Die Zahl seye $= x$
9 dazu addirt $= x + 9$
mit 5 dividirt $= \frac{x+9}{5}$

folglich $\frac{x+9}{5} = 13$

Multipl.) $\frac{5 \quad\quad 5}{x + 9 = 65}$

Subtr.) $\frac{9 \quad\quad 9}{x \quad = 56}$

Anmerkung.

§. 78. Diese Aufgabe kan auch so vorgetragen werden. Es kommen 5 Collectanten zu einem, und bitten ihn, um eine erkleckliche Beysteuer. Er spricht: Ich habe nicht Geld bey mir; doch, wenn ich noch 9 Kreutzer hätte, könnte ich einem jeden 13 Kreutzrr geben. Wie viel hat er gehabt?

Die 10. Aufgabe.

§. 79. Was ist das für eine Zahl, daß, nachdem man den fünften und dritten Theil von ihr weggegeben, noch 14 übrig behalte?

Auflösung.

Die Zahl seye $= x$

Der fünfte Theil $= \frac{x}{5}$ oder $\frac{3x}{15}$

Der dritte Theil $= \frac{x}{3}$ oder $\frac{5x}{15}$

Zusammen $= \frac{8x}{15}$

Von x abgezogen bleibt $\frac{7x}{15}$

Dahero $\frac{7x}{15} = 14$

Multipl. $15 \quad 15$

$7x = 210$

Divid. $7 \quad 7$

$x = 30$

Die 11. Aufgabe.

§. 80. Einer wurde gefragt, wie viel er Geld habe? Er gibt zur Antwort: Ich habe mein Geld in vier Beuteln; in dem ersten ist der siebende Theil; in dem zweyten der fünfte Theil; in dem dritten der sechste Theil; und ir dem vierten das übrige; in den ersten dreien habe ich zusammen 321 fl. Wie viel hat er überhaupt, und in jedem besonders?

Auf-

Auflösung.

Er habe gehabt x

in dem ersten Beutel $\frac{x}{7} = \frac{30x}{210}$

in dem zweyten $\frac{x}{5} = \frac{42x}{210}$

in dem dritten $\frac{x}{6} = \frac{35x}{210}$

Zusammen $321 = \frac{107x}{210}$

Mult.) $210 \quad 210$

$67410 = 107x$

Divid. $107 \quad 107$

$630 = x$

Probe: Im ersten $\frac{x}{7} = 90$

zweyten $\frac{x}{5} = 126$

dritten $\frac{x}{6} = 105$

321

630

folglich im vierten $= 309$

Die 12. Aufgabe.

§. 81. Eine Zahl zu finden, deren dritter Theil um 17 mehr ist als der vierte.

Auflösung.

Die Zahl seye $= x$, so ist

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 17$$

oder

$$\frac{4x}{12} = \frac{3x}{12} + 17$$

Subtr.)

$$\frac{3x}{12} \quad \frac{3x}{12}$$

$$\frac{x}{12} = 17$$

Mult.)

$$12 \quad 12$$

$$x = 204$$

Die 13. Aufgabe.

§. 82. Drey werden zu Erben eingesetzt, daß der andere nochmal so viel bekommen soll als der erste, und der dritte dreimal so viel als der andere. Das ganze Vermögen ist 18000 fl. Wie viel bekomt jeder?

Auf-

Auflösung.

Der erste bekomt x
Der andere $2x$
Der dritte $6x$

Zusammen $\frac{9x}{9} = \frac{18000}{9}$

$x = 2000$

Also der erste 2000
der zweyte 4000
der dritte 12000

18000

Die 14. Aufgabe.

§. 83. Ein Lehrmeister hat so viel Schüler, daß, wenn ihme einer zur Erkauffung eines Gartens 5 fl gibt, so hat er 42 fl. zu wenig; gibt ihm aber einer 6, so hat er 58 fl. zu viel. Wie viel hatte er Schüler, und wie hoch hat er den Garten gekauft?

Auflösung.

Die Anzahl seiner Schüler sey $= x$
gibt jeder 5 fl. so hat er $5x$, folglich kostet der Garten
$5x + 42$ fl.
gibt jeder 6 fl. so hat er $6x$, folglich kostet der Garten
$6x - 58$ fl. dahero

$$5x + 42 = 6x - 58$$
$$5x \qquad 5x$$

$$42 = x - 58$$
$$58 \qquad 58$$

$$100 = x$$

Probe: Es waren 100 Schüler; gab jeder 5 fl. so hat er 500 fl. das war um 42 fl. zu wenig; also kostete der Garten 542 fl. gab einer 6 fl. bekam er 600 fl. welches um 58 fl. zu viel, also kostete der Garten 542 fl.

Die 15. Aufgabe.

§. 84. Vorhergehende Aufgabe allgemeiner aufzulösen, oder eine Regel zu finden für alle dergleichen Exempel.

Auflösung.

Man setze an statt 5, *a*, an statt 6, *b*, an statt 42, *c*, an statt 58, *d*, so ist

$$ax + c = bx - d$$
$$d \qquad d$$

$$ax + c + d = bx$$
$$ax \qquad ax$$

$$c + d = bx - ax$$
$$= (b - a)x \ (\S.20.)$$
$$b - a \qquad b - a$$

$$\frac{c+d}{b-a} = x$$

Die

Die letzte Gleichung $\frac{c+d}{b-a} = x$ gibt eine allgemeine Regel für alle Exempel: Wenn an statt der Buchstaben die Wörter; an statt der Zeichen die Rechnungsarten gesetzt werden, folgender massen:

1) $c+d$, man addiret, was im ersten Fall zu wenig; im anderen zu viel gegeben worden.

2) $b-a$, man subtrahire die wenigere Zahl der gegebenen Gulden von der mehreren.

3) $\frac{c+d}{b-a}$, man dividire, was Nr. 1. gefunden worden durch das, was Nr. 2. gefunden worden.

4) $\frac{c+d}{b-a} = x$, so hat man die Anzahl der Schüler.

Anmerkung.

§. 85. Diese Regel gehet auch auf andere ähnliche Fälle, als: Eine Mutter hat Aepfel, gibt sie einem jeden ihrer Kinder 6, so hat sie 5 übrig; gibt sie aber 7, hat sie 3 zu wenig. Hier sind 5 und 3, c und d gibt 8, 6 von 7, a von b, gibt 1; 1 aber dividirt nicht, dahero sind 8 Kinder.

Die 16. Aufgabe.

§. 86. Eine Frau bringt Garn zum Weber, und verlangt davon 100 Ehlen. Der Weber sagte, es seyen 5 Pfundt zu wenig; darauf spricht sie, so wolle sie nur 80 Ehlen anspannen lassen; der Weber spricht, so werde sie 3 Pfundt übrig haben. Wie viel Pfundt Garn waren es, und wie viel Ehlen solte das Pfundt geben?

Auf-

Auflösung.

Die Pfundte des Garns seyen gewesen $= x$

so brauchte man zu 100 Ehlen $x + 5$

folglich zu einer Ehle $\frac{x+5}{100}$

zu 80 Ehlen $x - 3$, folglich zu einer $\frac{x-3}{80}$

dahero $\frac{x+5}{100} = \frac{x-3}{80}$

100 mult.) $x + 5 = \frac{100\,x - 300}{80}$

80 mult.)

$80\,x + 400 = 100\,x - 300$

add.) $300 \qquad 300$

$80\,x + 700 = 100\,x$

subtr.) $80\,x \qquad 80\,x$

$700 = 20\,x$

divid.) $20 \qquad 20$

$35 = x$

folglich geben $35 + 5 = 40$ Pfundt 100 Ehlen, also 1 Pfundt $2\frac{1}{2}$ Ehlen; desgleichen $35 - 3 = 32$ Pfundt geben 80, also 1 Pfundt $2\frac{1}{2}$ Ehlen.

Die

Die 17. Aufgabe.

§. 87. Eine Säule hatte einen Fus zu $5\frac{1}{2}$ Schuh von Stein; darauf war Holtz gesetzt, so die Hälfte der Säule ausmachte; über dem Holtz Kupfer $\frac{1}{5}$, und zu oberst Gold $\frac{1}{7}$ der Säule. Wie hoch war die Säule?

Auflösung.

Die Säule seye hoch gewesen $= x$

so war Stein $= 5\frac{1}{2}$

Holtz $= \frac{x}{2} = \frac{35x}{70}$

Kupfer $= \frac{x}{5} = \frac{14x}{70}$

Gold $= \frac{x}{7} = \frac{10x}{70}$

zusammen die ganze Säule $x = \frac{59x}{70} + 5\frac{1}{2}$

70 mult.

$$70x = 59x + 385$$

subtr.) $59x \quad 59x$

$$11x = 385$$

$11 \quad 11$

$$x = 35$$

Pro-

Probe: Stein $= 5\frac{1}{2}$

Holz $\frac{x}{2} = 17\frac{1}{2}$

Kupfer $\frac{x}{5} = 7$

Gold $\frac{x}{7} = 5$

35

Die 18. Aufgabe.

§. 88. Eine Zahl zu finden, deren Hälfte ein Drittel und ein Viertel um eines mehr macht, als die Zahl selber.

Auflösung.

Die Zahl seye $= x$, so ist

$$\frac{x}{2} = \frac{12x}{24}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{8x}{24}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{6x}{24}$$

zu:

zusammen $\frac{26x}{24} = x + 1$

mult.) $24 \qquad 24$

$26x = 24x + 24$

subtr.) $24x \qquad 24x$

$2x = 24$

divid.) $2 \qquad 2$

$x = 12$

Die 19. Aufgabe.

§. 89. Ein Vatter hinterläßt seinen 11 Kindern 3600 fl. mit dem Beding, daß ein Sohn 360 fl. eine Tochter aber 300 fl. bekommen solle; bey der Theilung gieng das Vermögen gerad auf. Wie viel Söhne und wie viel Töchter warens?

Auflösung.

Es seyen Söhne gewesen $= x$

so waren Töchter $11 - x$

jeder Sohn bekam 360 fl. also alle $360x$

jede Tochter 300 fl. also alle $3300 - 300x$

alle zusammen bekamen $3600 = 3300 + 60x$

$3300 \qquad 3300$

$300 = 60x$

$60 \qquad 60$

$5 = x$

folglich waren der Töchter 6, davon die Probe leicht zu machen.

Die 1. Anmerkung.

§. 90. Hätte man die ganze Erbschaft a genennet, die Anzahl der Kinder n, das, was ein Sohn bekommen soll, b, und was eine Tochter haben soll c; so würde heraus gekommen seyn $x = \frac{a - cn}{b - c}$, woraus eine Regel für alle ähnliche Fälle zu machen wäre, wie §. 84. gezeiget worden.

Die 2. Anmerkung.

§. 91. Zur Uebung wollen wir noch ein Exempel, das eben so gerechnet wird, anführen. In einer Stadt liegen 300 Mann, theils Reuter, theils zu Fus, diese kosten monatlich 1800 fl. daß einer zu Fus 5 fl. ein Reuter aber 8 fl. bekomme. Wie viel waren Reuter, und wie viel Fusvolk?

Die 20. Aufgabe.

§. 92. Ein Schweinhändler führet in eine Stadt 28 Schweine, gibt eines für den Zoll, und bekomt 9 fl. heraus. Ein andermal bringt er 132 Schweine, und muß ein Schwein nebst 4 fl. Zoll geben. Was hat ein Schwein gegolten?

Auflösung.

Ein Schwein habe gegolten $= x$

also war Zoll für alle 28 Schweine $= x - 9$

folglich wurde für eines gegeben $= \frac{x - 9}{28}$

des-

desgleichen wurden für 132 gegeben $= x + 4$

folglich für eines $= \frac{x+4}{132}$

dahero $\frac{x+4}{132} = \frac{x-9}{28}$

$$132 \text{ mult.)} \quad x + 4 = \frac{132x - 1188}{28}$$

$$28 \text{ mult.)} \quad 28x + 112 = 132x - 1188$$

$$\text{subtr.} \quad 28x \qquad 28x$$

$$112 = 104x - 1188$$

$$\text{add.)} \quad 1188 \qquad 1188$$

$$1300 = 104x$$

$$\text{div.)} \quad 104 \qquad 104$$

$$12\tfrac{1}{2} = x$$

Probe: 28 Schweine kosteten am Zoll $12\frac{1}{2}$ weniger 9 fl. das ist, $3\frac{1}{2}$ fl. oder 210 kr. folglich eine $7\frac{1}{2}$ kr. 132 kosteten $12\frac{1}{2} + 4$, das ist, $16\frac{1}{2}$ fl. oder 990 kr. folglich eine $7\frac{1}{2}$ kr. wie bey denen ersten.

Die 21. Aufgabe.

§. 93. Die Gymnasiasten in Megara haben einem Bildhauer für die 9 Musen zu verfertigen versprochen 36 fl nebst einem goldenen Becher, den sie ihm sogleich zum voraus gegeben. Nachdem er zwey fertig hatte, gieng er weg, und behielte dafür den Becher, doch gabe er noch

6 fl. heraus. Wie hoch hat er den Becher geschätzt?

Auflösung.

Der Becher seye wehrt gewesen $= x$
so bekam der Bildhauer für 9 Musen $x + 36$,

folglich für eine $\frac{x}{9} + 4$

für zwey bekam er $x - 6$

folglich für eine $\frac{x}{2} - 3$

dahero ist $\frac{x}{9} + 4 = \frac{x}{2} - 3$

oder $\frac{2x}{18} + 4 = \frac{9x}{18} - 3$

$$-\frac{2x}{18} + 3 \quad -\frac{2x}{18} + 3$$

$$7 = \frac{7x}{18}$$

7 div.)

$$1 = \frac{x}{18}$$

18 mult.

$$18 = x$$

Die Probe kan jeder leicht machen.

Die 22. Aufgabe.

§. 94. Cajus spricht zu Titio: Gib mir $\frac{1}{3}$ von dei-

deinem Geld, und noch 3 fl. so hab ich dreymal so viel, als dir geblieben. Titius spricht: Gib mir von deinem die Hälfte, und noch 2 fl. so hab ich neunmal so viel als du. Wie viel hatte jeder?

Auflösung.

Cajus hatte x Titius y

bekomt Cajus von Titio $\frac{1}{3}$ und 3 fl. so hat er

$x + \frac{y}{3} + 3$, Titius hingegen $\frac{2y}{3} - 3$

wird nun $\frac{2y}{3} - 3$ dreymal genommen, $= 2y - 9$

so ist es so viel als des Caji, das ist

$$x + \frac{y}{3} + 3 = 2y - 9$$

bekomt Titius von Cajo die Hälfte seines Geldes und 2 fl.

so hat er $y + \frac{x}{2} + 2$, Cajus aber $\frac{x}{2} - 2$

wird des Caji $\frac{x}{2} - 2$, neunmal genommen, $= \frac{9x}{2}.$ $- 18$, so ist es so viel als des Caji, das ist $y +$

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{9x}{2} - 18$$

$$x + \frac{y}{3} + 3 = 2y - 9 \qquad\qquad y + \frac{x}{2} + 2 = \frac{9x}{2} - 18$$

$$\frac{y}{3} \qquad \frac{y}{3} \qquad\qquad \frac{x}{2} \qquad \frac{x}{2}$$

$$x + 3 = \frac{5y}{3} - 9 \qquad\qquad y + 2 = 4x - 18$$

$$3 \qquad\qquad 18 \qquad 18$$

$$x = \frac{5y}{3} - 12 \qquad\qquad y + 20 = 4x$$

$$4 \qquad 4$$

$$\frac{y}{4} + 5 = x$$

daher

$$\frac{5y}{3} - 12 = \frac{y}{4} + 5$$

3)

$$5y - 36 = \frac{3y}{4} + 15$$

4)

$$20y - 144 = 3y + 60$$

$$-3y + 144 \qquad 144 - 3y + 144$$

$$17y = 204$$

$$17 \qquad 17$$

$$y = 12$$

Setzt man in obige Aequation $\frac{y}{4} + 5 = x$ den Wehrt von y, nemlich 12, so ist $\frac{12}{4} + 5 = x$ oder $8 = x$

Die

Die 23. Aufgabe.

§. 95. Eine gewisse Stadt, die drey Gassen hat, braucht 900 fl. daran soll die andere Gasse nochmal so viel zahlen als die erste, weniger 17 fl. die dritte $\frac{2}{3}$ der ersten, und noch 11 fl. Wie viel hat jede zahlen müssen?

Auflösung.

Die erste hat zahlt x
die andere $2x - 17$
die dritte $\frac{2x}{3} + 11$

zusammen $\frac{11x}{3} - 6 = 900$

$$3) \quad 11x - 18 = 2700$$
$$\quad\quad 18 \quad\quad 18$$
$$11x = 2718$$
$$11 \quad\quad 11$$
$$x = 247\tfrac{1}{11}$$

Probe: Die erste muste geben $247\frac{1}{11}$
die zweyte $477\frac{2}{11}$
die dritte $175\frac{8}{11}$

900

Die 24. Aufgabe.

§. 96. Etliche Knaben und Mägdlein machten unter sich einen zum König, dem sie die Augen zugebunden, bis sich die übrigen verstek-

ten, die er suchen muste, mitlerweile aber bemüheten sie sich, ihme seinen Thron einzunehmen. Es waren anderthalbmal so viel Knaben als Mägdlein, von den Knaben hatte der König $\frac{2}{3}$, von den Mägdlein $\frac{3}{4}$ gefunden, und ehe er noch die 6 übrige finden konnte, war sein Thron eingenommen. Wie viel waren Knaben und Mägdlein?

Auflösung.

Mägdlein waren $= x$

folglich Knaben $= \frac{3x}{2}$

von den Knaben $\frac{3x}{2}$ fande er $\frac{2}{3}$, das ist x

von den Mägdlein $\frac{3}{4}$, das ist $\frac{3x}{4}$

noch übrig waren 6

zusammen $x + \frac{3x}{4} + 6 = x + \frac{3x}{2}$

$$\begin{array}{l} x + \frac{3x}{4} + 6 = x + \frac{3x}{2} \\ x \qquad\qquad\quad x \\ \hline \frac{3x}{4} + 6 = \frac{3x}{2} \\ 4) \hline 3x + 24 = 6x \\ 3x \qquad\quad 3x \\ \hline 24 = 3x \\ 3 \quad\; 3 \\ \hline 8 = x \end{array}$$

folglich $1\frac{1}{2}$mal so viel Knaben, 12.

Die

Die 25. Aufgabe.

§. 97. Es hat jemand zwey Becher samt einem Deckel, der 18 fl. wehrt. Wird der Deckel auf den ersten Becher gesetzt, so ist er nochmal so viel wehrt als der andere. Wird er aber auf den anderen gesetzt, so ist er ein Viertel mehr wehrt, als der erste. Wie viel ist jeder wehrt?

Auflösung.

Der erste seye wehrt x der andere y
wird der Deckel auf den ersten gesetzt, so ist er $x + 18$ wehrt, folglich $x + 18 = 2y$
wird er auf den anderen gesetzt, so ist er wehrt $y + 18$
folglich $y + 18 = \frac{5x}{4}$

$$\begin{array}{c} 18 \qquad 18 \\ y = \frac{5x}{4} - 18 \end{array}$$

$$2)\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$2y = \frac{5x}{2} - 36$$

daher $x + 18 = \frac{5x}{2} - 36$

$$\begin{array}{c} 36 \qquad\qquad 36 \\ \hline x + 54 = \frac{5x}{2} \end{array}$$

$$2)\ \overline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\begin{array}{c} 2x + 108 = 5x \\ 2x \qquad\qquad 2x \end{array}$$

$$\frac{108=3x}{3\quad 3}$$
$$36=x$$

wird der Wehrt von x in die Aequation $y=\frac{5x}{4}-18$ gesetzt, so komt $y=45-18=27$

Die 26. Aufgabe.

§. 98. Ihrer drey verrichten ein Werk, daß sie zusammen 120 Taglöhn verdienen, der erste bekomt täglich 20 kr. der andere 24 kr. der dritte 30 kr. Es bekomt aber einer so viel als der andere. Wie viel Tage hat jeder gearbeitet?

Auflösung.

Der erste hat Tage gearbeitet x, bekomt daher $20x$
der andere y, bekomt daher $24y$
der dritte $120-x-y$, bekomt folglich
$30(120-x-y)$ das ist $3600-30x-30y$

nun ist $20x=24y$
$$\frac{20x=24y}{20\quad 20}$$
$$x=\frac{6y}{5}$$

ferner ist $24y=30(120-x-y)$
wird nun hierinn der Wehrt von x gesetzt, so kommet
$24y=30(120-\frac{6y}{5}-y)$ oder

$$24y=3600-36y-30y$$
$$\frac{66y\qquad 66y}{90y=3600}$$
$$\frac{90\qquad 90}{y=40}$$

wird

wird der Wehrt von y in die Aequation $x = \frac{6y}{5}$ gesetzt,

so ist $x = 48$, folglich $120 - 48 - 40 = 32$

also der erste 48 Tage zu 20 kr. gibt 960

andere 40 Tage zu 24 kr. gibt 960

dritte 32 Tage zu 30 kr. gibt 960

120

Die 27. Aufgabe.

§. 99. Es sind drey Fässer, davon das erste voll, die andere zwey leer. Wird das zweyte aus dem ersten gefüllet, bleibt im ersten $\frac{2}{3}$ übrig. wird das dritte aus dem ersten angefüllt, bleibt $\frac{5}{9}$ übrig. Würde man aber das erste aus den beyden andern anfüllen, so fehlten noch 8 Ohm. Wie viel hält jedes von diesen Fässern?

Auflösung.

Das erste halte x

so hält das andere $\frac{x}{3}$, weil $\frac{2}{3}$ im ersten übrig bleiben.

das andere $\frac{4x}{9}$ aus gleicher Ursache

dahero $\frac{x}{3} + \frac{4x}{9} + 8 = x$

mult.) 9 9

$7x + 72 = 9x$

$7x \qquad 7x$

72

$$\begin{array}{r} 72 = 2x \\ 2 \quad 2 \\ \hline 36 = x \end{array}$$

Wie viel die übrigen gehalten, und wie die Probe zu machen, siehet jeder leicht ein.

Die 28. Aufgabe.

§. 100. Ein Vatter vermacht seinem ältesten Sohn zum voraus 1000 fl. und sodann den fünften Theil von seinem übrigen Vermögen; dem zweyten 2000 fl. und auch den fünften Theil von dem übrigen; dem dritten 3000 fl. und den fünften Theil vom übrigen, u. s. w. bis das ganze Vermögen gar ist. Bey dem theilen bekam einer so viel als der andere. Wie groß war das Vermögen, und wie viel Söhne?

Auflösung.

Das Vermögen sey gewesen x

der erste Sohn bekam 1000, und weil sodann noch $x - 1000$ übrig war, bekam er davon $\frac{1}{5}$, das ist $\frac{x}{5} - 200$, folglich überhaupt $1000 + \frac{x}{5} - 200$, das ist $800 + \frac{x}{5}$

der zweyte bekam 2000, der Rest aber war $x - 800 - \frac{x}{5} - 2000$, das ist $\frac{4x}{5} - 2800$, davon der

fünf-

fünfte Theil $\frac{4x}{25} - 560$, also zusammen $2000 + \frac{4x}{25} - 560$, das ist $1440 + \frac{4x}{25}$

weil nun einer so viel bekam als der andere, so ist

$$800 + \frac{x}{5} = 1440 + \frac{4x}{25}$$
$$800 \qquad 800$$
$$\frac{x}{5} = 640 + \frac{4x}{25}$$
$$25 \qquad 25$$
$$5x = 16000 + 4x$$
$$4x \qquad 4x$$
$$x = 16000$$

Wann von diesen 16000 fl. der erste 1000 bekomt und von den übrigen 15000 den 5ten Theil, so hat er 4000. Da aber einer bekomt, was der andere, so müssen es 4 Söhne gewesen seyn, weil 4000 in 16000 viermal enthalten ist.

Die 29. Aufgabe.

§. 101. Vorgehende Aufgabe allgemein aufzulösen.

Auflösung.

Das Vermögen sey auch $= x$
der erste bekomme a
der zweyte $2a$ u. s. w.

Der

Der Theil sey $\frac{1}{n}$, so ein jeder noch haben soll, daher bekomt der erste a und $\frac{1}{n}$ von $x - a$, das ist $a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n}$

der andere $2a$ und $\frac{1}{n}$ von $x - 3a - \frac{x}{n} + \frac{a}{n}$ das

ist $2a + \frac{x}{n} - \frac{3a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$

dahero $a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n} = 2a + \frac{x}{n} - \frac{3a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$

$$a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n} \qquad a + \frac{x}{n} - \frac{a}{n}$$

$$0 = a - \frac{2a}{n} - \frac{x}{nn} + \frac{a}{nn}$$

$$nn \qquad nn$$

$$0 = nna - 2na - x + a$$

$$x \qquad x$$

$$x = nna - 2na + a$$

$$x = (n - 1)^2 a$$

Da nun der erste oder ein jeder bekomt $a + x:n - a:n$ und der Wehrt von x, das ist $nna - 2na + a$ darein gesetzt wird, so ists $a + na - 2a + a:n - a:n$, das ist $na - a$ oder $(n - 1)a$.

wird

Wird das, was ein jeder bekomt, in die ganze Summe dividirt, bekömt man die Zahl der Söhne.

$$(n-1)^2 a : (n-1) a, \text{ das ist } n-1$$

Hieraus folgt die Regel:

Die ganze Verlassenschaft ist $(n-1)^2 a$
einer bekomt $(n-1)\,a$
die Anzahl der Söhne $n-1$

Die 30. Aufgabe.

§. 102. Einer gibt dem nächsten Bettler $\frac{1}{6}$ seines Geldes, und 4 kr. drüber; dem andern auch $\frac{1}{6}$ von dem Rest, und 8 kr. dem dritten wieder $\frac{1}{6}$ vom Rest, und 12 kr. u. s. w. bis sein Geld gar ist. Ein Bettler bekam so viel als der andere. Wie viel warens Bettler, und wie viel hatte er Geld?

Auflösung.

Er habe Geld gehabt x

so bekam der erste $\frac{x}{6} + 4$

also war der Rest $\frac{5x}{6} - 4$

$\frac{1}{6}$ davon ist $\frac{5x}{36} - \frac{4}{6}$

daher bekam der andere $\frac{5x}{36} - \frac{4}{6} + 8$

also ist

$- +$

$$\frac{x}{6} + 4 = \frac{5x}{36} - \tfrac{4}{6} + 8$$

$$4 \qquad\qquad\qquad 4$$

$$\frac{x}{6} = \frac{5x}{36} - \tfrac{4}{6} + 4$$

$$36)\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$6x = 5x - 24 + 144$$

$$5x \quad 5x$$

$$x = 120$$

Also bekam der erste 24, welches in 120 dividirt 5, oder die Anzahl der Bettler gibt, wie die Probe zeiget.

Die 30. Aufgabe.

§. 103. Vorstehende Aufgabe allgemein zu machen.

Auflösung.

Es seye, wie vorhin, die Summe des Geldes x
an statt $\frac{1}{6}$ seye $1:n$
an statt 4 seye a
so bekomt der erste $x:n + a$
der andere $x:n - x:nn - a:n + 2a$
dahero $x:n - x:nn + 2a - a:n = x:n + a$

$$x:n + a \qquad\qquad x:n + a$$

$$-x:nn + a - a:n = 0$$

$$x:nn \qquad\qquad x:nn$$

$$a - a:n = x:nn$$

$$nn)\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$nna - na = x$$

$$na\,(n - 1) = x$$

Der

Der erste bekam $x:n+a$, wird nun darein der Wehrt von x gesetzt, so komt $an-a+a=an$

also bekomt einer an

wird an in die ganze Summe dividirt $(na(n-1)):(an)$, gibt es $n-1$ die Anzahl der Bettler.

Daher diese Regel:

Die Summe des Geldes ist $na\,(n-1)$

einer bekomt na

Bettler sind $n-1$.

Die 31. Aufgabe.

§. 104. Ein Springbrunnen hat 4 Röhren, durch eine wird der Kasten in 2 Stunden voll, durch die andere in 3 Stunden, durch die dritte in 6 Stunden, und durch die vierte in 4 Stunden. Wie bald wird er voll, wenn alle 4 zugleich laufen?

Auflösung.

Die gesuchte Zeit seye x

der Inhalt des Kastens y

nun kan man sprechen:

In 2 Stunden wird y voll, was in x? $\frac{xy}{2}$

— 3 — — y — — x? $\frac{xy}{3}$

— 6 — — y — — x? $\frac{zy}{6}$

— 4 — — y — — x? $\frac{xy}{4}$

$$\frac{5xy.}{4}$$

daher ist

$$y = \frac{5xy}{4}$$

$$\underline{y \qquad y}$$

$$1 = \frac{5x}{4}$$

$$\underline{4 \qquad 4}$$

$$4 = 5x$$

$$\underline{5 \qquad 5}$$

$$\frac{4}{5} = x$$

$\frac{4}{5}$ Stunden sind 48 Minuten, wornach die Probe leicht: denn lauft durch die erste Röhre der Kasten in 120 Minuten voll, so lauft er in 48 Minuten nur $\frac{2}{5}$ voll, und so in den übrigen.

Die 32. Aufgabe.

§. 105. Ein General stellet seine Soldaten in eine viereckigte Schlachtordnung, und da bleiben ihme 284 Mann übrig. Darauf stellet er in jede Reihe einen Mann mehr, und macht auch eine Reihe weiter, da hat er 25 zu wenig. Wie viel hatte er?

Auflösung.

Er habe das erstemal in eine Reihe gestellt x

so machte die viereckigte Schlachtordnung xx

folglich waren seine Soldaten zusammen $xx + 284$

folg-

stellte er in jede Reihe einen Mann weiter, so waren es $x + 1$, und alle zusammen

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x + 1 \\ \hline x + 1 \\ xx + x \quad \\ \hline xx + 2x + 1 \end{array}$$

folglich waren seine Soldaten zusammen $xx + 2x + 1 - 25$

daher

$$\begin{array}{rcl} xx + 284 & = & xx + 2x - 24 \\ xx & & xx \\ \hline 284 & = & 2x - 24 \\ 24 & & 24 \\ \hline 308 & = & 2x \\ 2 & & 2 \\ \hline 154 & = & x \end{array}$$

daher machte 154mal 154 und noch 284 die Anzahl seiner Soldaten aus, nemlich 24000, oder 155mal 155, weniger 25.

Die 33. Aufgabe.

§ 106. Ein Oberster hat unter sich etliche Hauptleute; ein jeder Hauptmann hat noch so viel Unterhauptleute unter sich, als Hauptleute sind; ein jeder Unterhauptmann hat viermal so viel Soldaten als Hauptleute, und jeder Hauptmann hat 9 Soldaten zu seiner Bedienung, welches den 200sten Theil von allen Soldaten macht. Wie viel sind von jeden?

Auflösung.

Hauptleute waren x
unter jedem Hauptmann Unterhauptleute $2x$
also alle Unterhauptleute zusammen $2xx$
unter jedem Unterhauptmann Soldaten $4x$
daher alle Soldaten zusammen $8x^3$
hat jeder Hauptmann 9 Soldaten, so sind $9x$
folglich $9x = 8x^3 : 200$

$$9x = x^3 : 25$$

$$x \quad x$$

$$9 = x^2 : 25$$

$$225 = x^2$$

Extr. R.

$$15 = x$$

Die 34. Aufgabe.

§. 107. Eine Mauer ist $3\frac{1}{2}$mal so lang als breit, und fünfmal so hoch als lang, jeder Cubicschuh daran kostet so viel Gulden als viel Schuh die Breite hat, die ganze Mauer aber 980 Gulden. Wie hoch, breit und lang war sie?

Auflösung.

Die Breite seye x
so ist die Länge $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$mal x, das ist $\frac{7}{2}x$
die Höhe 5mal $\frac{7}{2}x$, das ist $\frac{35}{2}x$
wird Länge, Breite und Höhe in einander multipliciret, so komt der Inhalt oder die Cubicschuhe heraus, nemlich $\frac{245}{4}x$, jeder davon gilt x fl. folglich zusammen

$$245x^4 : 4 = 980$$
$$\underline{4 \qquad 4}$$
$$245x^4 = 3920$$
$$\underline{245 \qquad 245}$$
$$x^4 = 16$$

Extr. R.)
$$x^2 = 4$$

Extr. R.)
$$x = 2$$

Breite 2
Länge 7
Höhe 35.

Die 35. Aufgabe.

§. 108. Ich habe für jemanden 1202 Rthaler eingenommen, die ich ihm mit der Post schicken soll. Das Postgeld beträgt $\frac{1}{6}$ Rthler von 100; dieses soll ich an meinem Orte bezahlen, und ihm abziehen. Wie viel muß ich ihm also schicken?

Auflösung.

Wenn ich ihm die 1202 Rthaler völlig schickte, so müßte ich das Postgeld aus dem Meinigen bezahlen, wozu ich nicht verbunden bin. Das Postgeld würde so berechnet:

$$100 : 1202 = \frac{1}{6} : \frac{1202}{600}$$

Es betrüge also $2\frac{2}{600} = 2\frac{1}{300}$ Rthaler oder 2 Rthaler und $\frac{3}{10}$ eines Kreutzers. Ich muß also weniger als 1202 Rthaler auf die Post geben, und zwar so, daß das, was ich gebe, mit dem Postgelde zusammen 1202 Rthaler beträgt. Das, was ich gebe, hiesse y; so schließt man, das Postgeld zu finden, so: $100 : \frac{1}{6} = y : \frac{y}{600}$

Und daher ist $y + \frac{y}{600} = 1202$ oder $\frac{601y}{600} = 1202$ oder mit 600 beyderseits multiplicirt $601y = 1202.600$ oder mit 601 beyderseits dividirt $y = \frac{1202.600}{601}$. Weil nun $1202 = 2.601$, so ist $y = \frac{2.601.600}{601} = 2.600 = 1200$, oder ich schicke ihm 1200 Rthaler; diese geben $12.\frac{1}{6} = 2$ Rthaler Postgeld, und machen also mit dem Postgelde zusammen 1202 Rthaler aus.

Allgemein liesse sich dieses so abfassen: Das Postgeld von 100 Rthaler heisse u; ich habe die Summe a eingenommen; was ich schicke, heißt wieder y; so schließt man $100 : u = y : \frac{uy}{100}$

Das letzte wäre das Postgeld. Also ist

$y + \frac{1}{100} uy = a$ oder $\frac{(100 + u).}{100} y = a$ oder $y = \frac{100a}{100 + u}$. Im Exempel wäre $u = \frac{1}{6}$ und $100 + u = 100 + \frac{1}{6} = \frac{601}{6}$.

Zu-

Zusatz.

§. 109. Wann ich jemanden 1000 Rthaler gegen Interessen zu 5 Procent auf ein Jahr leihe, so müßte er mir am Ende des Jahres 50 Rthaler Interessen geben. Gesetzt nun, ich wolte ihm die Interessen gleich beym Anfange abziehen, und gäbe ihm 950 Rthaler, so verführe ich mit ihm ungerecht; denn für ein Darlehn von 950 Rthaler, würde er mir am Ende des Jahres nicht 50 Rthaler Interessen schuldig, sondern nur $47\frac{1}{2}$, daß ich ihm also um $2\frac{1}{2}$ Rthaler unrecht thäte. Ich muß ihm folglich so viel geben, daß das, was ich ihm gebe,, mit den Interessen eines Jahres zusammen, 1000 Rthaler beträgt, so giebt er mir am Ende des Jahres 1000 Rthaler wieder; aber keine Interessen, die schon abgerechnet sind. Man sieht leicht, daß dieß eben die vorige Frage ist, nur daß der Namen, Interessen statt Postgeld kömt. Man setze also $u = 5$; $a = 1000$; so kömt $y = \frac{100000}{105} = 952\frac{8}{21}$ Rthaler.

Probe:	Capital	$952\frac{8}{21}$
Interessen von 950;		$47\frac{1}{2}$
von $2\frac{8}{21}$ oder $\frac{50}{21}$;		$\frac{25}{210}$
	Summe	1000

Die 36. Aufgabe.

§. 110. Aus der gegebenen Summe und Product zweyer Zahlen, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die halbe Differenz dieser Zahlen seye x (§. 76.).

die Summe $= a$,
das Product $= b$,
so ist die grössere $\frac{1}{2}a + x$
die kleinere $\frac{1}{2}a - x$ (§. 109.).

$$-\frac{1}{2}ax - xx$$
$$\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ax$$

Product $\frac{1}{4}aa - xx = b$

$$xx \quad xx$$
$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$
$$b \quad b$$
$$\frac{1}{2}aa - b = xx$$

$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$

Extr. R.)

$$\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = x$$

Es sey $a = 16$, $b = 63$, so ist $\sqrt{\frac{1}{4}aa - b} = \sqrt{64 - 63} = \sqrt{1} = 1$, daher ist die grosse Zahl $= 8 + 1$ oder 9, die kleinere $8 - 1$ oder 7.

Anmerkung.

Wenn man die eine Zahl x, und die andere y hätte nennen wollen, würde man auf eine Aequation verfallen seyn, die man nach bisher gezeigten Gründen nicht würde haben auflösen können, daher man sieht, wie viel am Benennen gelegen sey.

Die 37. Aufgabe.

§. 111. Aus der gegebenen Summe und Quotienten zweyer Zahlen die Zahlen selber zu finden.

Auf-

Auflösung.

Die Summe seye $= a$, der Quotient $= b$
die eine Zahl $= x$, die andere $= y$
so ist $x + y = a$ $x : y = b$

$$\frac{\quad y \quad y}{x = a - y} \qquad \frac{y \quad y}{x = by}$$

$$a - y = by$$
$$\frac{\quad y \quad y}{a = by + y}$$

oder $a = (b + 1)\, y$
$$\frac{b + 1 \quad b + 1}{a : (b + 1) = y}$$

Nun ist $x = by$, oder wenn der Wehrt von y gesetzt wird, $x = ab : (b + 1)$

Es seye $a = 16$, $b = 7$, so ist $x = 16.7 : (7 + 1) = 112 : 8 = 14$ und $y = 16 : (7 + 1) = 16 : 8 = 2$.

Die 38. Aufgabe.

§. 112. Aus der gegebenen Differenz und Product zweyer Zahlen, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Die Differenz sey $= a$, das Product $= b$
die halbe Summe $= x$, so ist
die grosse $x + \frac{1}{2}a$
die kleine $x - \frac{1}{2}a$

$$\text{Product } x^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = b$$
$$\frac{\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2}{x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b}$$
$$x = \sqrt{a^2 : 4 + b}$$

Es seye $a = 12$, $b = 28$, so ist $x = \sqrt{36 + 28} = \sqrt{64} = 8$, also ist die grosse Zahl $= 8 + 6 = 14$, die kleine $8 - 6 = 2$.

Die 39. Aufgabe.

§. 113. Aus der gegebenen Differenz und Quotienten zweyer Zahlen, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Die Differenz sey $= a$, der Quotient $= b$, die beyde Zahlen x und y, so ist

$$\begin{array}{ll} x - y = a & x : y = b \\ \quad\ \ y \quad y & \quad\ y \quad y \\ \hline x = a + y & x = by \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a + y = by \\ \quad y \quad y \\ \hline a = by - y \\ b - 1 \quad b - 1 \\ \hline a : (b - 1) = y \text{ folglich } x = ab : (b - 1) \end{array}$$

Es seye $a = 18$, $b = 7$, so ist $y = 18 : (7 - 1) = 3$, und $x = 21$.

Die 40. Aufgabe.

§. 114. Aus dem gegebenen Product und Quotienten zweyer Zahlen, die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Das Product seye $= a$, der Quotient $= b$, die beyden Zahlen x und y, so ist

xy =

$$xy = a \qquad x:y = b$$
$$x = a:y \qquad x = by$$
$$a:y = by$$
$$a = byy$$
$$a:b = yy$$
$$\sqrt{a:b} = y$$

Will man x haben, so würde es $b\sqrt{a:b}$ geben; weil wir aber noch nicht gezeiget, wie dieser Vorfall zu behandeln, so wollen wir indessen den gemeinen Weg gehen.

$$xy = a \qquad x:y = b$$
$$y = a:x \qquad x = by$$
$$x:b = y$$
$$a:x = x:b$$
$$a = x^2:b$$
$$ab = x^2$$
$$\sqrt{ab} = x$$

Es seye $a = 63$, $b = 7$, so ist $y = \sqrt{9} = 3$, $x = \sqrt{441} = 21$.

Zusatz.

§. 115. Weil $xy.\frac{x}{y} = x^2$ und $xy:\frac{x}{y} = xy.\frac{y}{x} = y^2$; so erhellt folgendes: Das Product von ein Paar Zahlen mit ihrem Quotienten multiplicirt, gibt das Quadrat der Zahl, die im Quotienten Di-

Dividendus war; und das Product von ein Paar Zahlen mit ihrem Quotienten dividirt, giebt das Quadrat der Zahl, die im Quotienten Divisor war. Diese Multiplication und Division geben also Quadrate, die Rationalwurzeln haben.

Die 41. Aufgabe.

§. 116. Aus der gegebenen Summe zweyer Zahlen und der Differenz ihrer Quadraten die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die Summe sey $= a$, die Differenz $= b$, die halbe Differenz der Zahlen x, so ist die

$$\begin{array}{lrl}
\text{grosse Zahl} & & = \tfrac{1}{2}a + x \\
 & & \tfrac{1}{2}a + x \\
\hline
 & & + \tfrac{1}{2}ax + x^2 \\
 & \tfrac{1}{4}a^2 & + \tfrac{1}{2}ax \\
\hline
\text{das Quadr.} & \tfrac{1}{4}a^2 & + ax + x^2 \\
\text{die kleine Zahl} & & \tfrac{1}{2}a - x \\
 & & \tfrac{1}{2}a - x \\
\hline
 & & - \tfrac{1}{2}ax + x^2 \\
 & \tfrac{1}{4}a^2 & - \tfrac{1}{2}ax \\
\hline
\text{das Quadr.} & \tfrac{1}{4}a^2 & - ax + x^2 \\
\hline
 & \tfrac{1}{4}a^2 & + ax + x^2 \\
 & \tfrac{1}{4}a^2 & - ax + x^2 \\
\hline
\text{Differenz der Quadr.} & & 2ax = b \\
 & & 2a \quad 2a \\
\hline
 & & x = b : 2a
\end{array}$$

Es seye $a = 11$, $b = 33$, so ist $x = \frac{33}{22} = 1\frac{1}{2}$, daher ist die

die grosse Zahl $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 7$, die kleine $5\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 4$.

Die 42. Aufgabe.

§. 117. Aus der gegebenen Differenz zweyer Zahlen und der Summe ihrer Quadraten die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung.

Die Differenz seye $= a$, die Summe der Quadrate $= b$,
die halbe Summe $= x$, so ist
die grosse Zahl $= x + \frac{1}{2}a$
ihr Quadrat $= x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$
die kleine Zahl $= x - \frac{1}{2}a$
ihr Quadrat $= x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$

$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$$

Summe der Quadr. $2x^2 + \frac{1}{2}a^2 = b$

$$\frac{2x^2 + \frac{1}{2}a^2}{2} = \frac{b}{2}$$
$$x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{2}b$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \qquad \tfrac{1}{4}a^2$$
$$x^2 = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2$$
$$x = \sqrt{b:2 - a^2:4}$$

Es seye $a = 5$, $b = 73$, so ist $x = \sqrt{73:2 - 25:4} = \sqrt{36\frac{1}{2} - 6\frac{1}{4}} = \sqrt{30\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$, ist also die grosse Zahl $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 8$, die kleine $5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3$.

Anmerkung.

§. 118. Es könnten noch eine grosse Menge derglei-

chen

chen Aufgaben gemacht werden, als aus der Summe und Differenz der Quadraten, aus dem Product der Zahlen, und der Differenz der Quadraten, ꝛc. die Zahlen selber zu finden. Es mögen aber diese genug seyn, zumal verschiedene davon solche Aequationen erfordern, die man nach bisherigen Gründen aufzulösen nicht im Stande wäre.

Die 43. Aufgabe.

§. 119. Aus der gegebenen Tagreise zweyer Boten und der Zeit, da der andere dem ersten nachgehet, die Zeit zu bestimmen, wenn er den ersten einholt.

Auflösung.

Der erste gehe täglich 5 Meilen, der andere 7 Meilen, der erste seye weg schon 6 Tage, er solle von dem andern eingeholt werden in x Tagen, so ist die Zeit, da der erste lauft $6 + x$

und da er täglich 5 Meilen lauft 5

so ist sein ganzer Weg $30 + 5x$

Die Zeit des andern ist nur x

und täglich gehet er 7

$7x$

Nun laufen sie einen gleichen Weg durch, dahero ist

$$30 + 5x = 7x$$
$$5x \quad 5x$$
$$30 = 2x$$
$$2 \quad 2$$
$$15 = x$$

Die

Die 44. Aufgabe.

§. 120. Eine allgemeine Regel für die vorstehende Aufgabe zu finden.

Auflösung.

Die Tagreise des ersten $= a$
des andern $= b$
die Zeit, da der erste hinweg $= c$
die Zeit, da der andere ihn einholen solle $= x$
so ist des ersten Weg $= c + x$

$$\begin{array}{r} c + x \\ a \\ \hline ac + ax \end{array}$$

des andern $= bx$

dahero
$$\begin{array}{c} bx = ac + ax \\ ax \qquad\quad ax \\ \hline bx - ax = ac \\ b - a \quad b - a \\ \hline x = \dfrac{ac}{b - a} \end{array}$$

Die Regel ist: 1) Multipliciret die Tagreise des ersten mit der Zeit, da er hinweg ist, 2) dividiret das Product mit dem Unterschied der Tagreisen beyder Boten: so habt ihr die gesuchte Zeit.

Die 1. Anmerkung.

§. 121. Diese Aufgabe kann bey der Bewegung aller Körper gebraucht werden, die sich nach einer Gegend bewegen, einer aber geschwinder als der andere, wenn die Weite von einander bekannt, und wie viel jeder in einer gewissen

Zeit

Zeit durchlauft. In solchem Falle würde man an statt ac die Weite, die c heissen mag, setzen müssen: denn ac ist nichts anders, als wie weit der erste schon gekommen; b und a aber würde die Grösse der Bewegung in einer gewissen Zeit von jedem Körper seyn. Und dieses gäbe folgende Aequation: $x = c : (b - a)$. Z. E. Anno 1758 auf Johannis, den 24 Junii, auf dem Mittag, stehet die Sonne im vierten Zeichen 2°, 44′, der Mond im 11ten Zeichen 14°, 39′, folglich ist der Mond vom Ende der 12 Zeichen noch entfernet 1 Z. 45°, 21′, die Sonne aber von diesem End oder Anfang der Zeichen 3 Z. 2°, 44′, welches ihre Entfernung zusammen macht 4 Z. 18° 5′, oder 29826000‴, der Mond lauft in einer Minute 32″. 56‴. oder 1976‴; die Sonne 2″. 28‴. oder 148‴. Nach obstehender Regel wird die Zeit der Zusammenkunft des Mondes und der Sonne seyn $x = 29826000 : (1976 - 148)$, das ist, 16316 Minuten, oder 11 Tag, 7 Stunden, 56 Minuten. Doch lehret die Astronomie, daß noch einige Ungleichheiten mit berechnet werden müssen.

Die 2. Anmerkung.

§. 122. Wir wollen hier Gelegenheit nehmen zu zeigen, wie vortheilhaft die Buchstaben seyen, durch eine Aufgabe alle dahin einschlagende Aufgaben aufzulösen. In unserer Aufgabe kommen 4 Zahlen vor, nemlich die beyde Tagreisen, die Zeit, da der erste weg, und die Zeit, da er eingeholt wird. Eine jede von diesen Zahlen kann unbekannt, und die übrigen bekannt seyn, woraus 4 Aufgaben entstehen, welche alle aus der Aequation $bx = ac + ax$ aufgelöset werden. Als, es wäre des ersten Tagreise, die Zeit, da er hinweg, und die Zeit, da er eingeholt werden soll, gegeben, die Tagreise des andern zu bestimmen, so dürfte nur b als unbekannt angesehen, und auf eine Seite gebracht werden.

$$bx = ac + ax$$
$$\underline{\quad x \qquad\quad x \quad}$$
$$b = (ac + ax) : x = a(c + x) : x = ac : x + a$$

wird a an statt x gesucht, so ist

$$xb = ca + ax$$
$$\underline{\quad t + x \quad c + x \quad}$$
$$xb : (c + x) = a$$

sucht man c statt x, so ist

$$bx = ac + ax$$
$$\underline{\quad ax \qquad\quad ax \quad}$$
$$bx - ax = ac$$
$$\underline{\quad a \qquad\qquad a \quad}$$
$$(bx - ax) : a = c = x(b - a) : a = bx : a - x$$

Wie alles dieses mit Worten auszudrucken sey, wird ein jeder einsehen, der der Buchstabenrechnung nur ein wenig gewohnt ist.

Die 3. Anmerkung.

§. 123.. Es gibt noch mehr hieher gehörige Aufgaben, die aber etwas schwerer scheinen, wegen vieler dabey vorkommenden Umständen, davon folgende Aufgaben zeugen. Ehe wir aber zu denenselben schreiten, wollen wir nur bemerken, daß, wenn Geschwindigkeiten als bekannt gegeben werden, solches so viel heisse, es seye bekannt, wie einen grossen Raum ein jeder Körper in einerley Zeit durchlaufe. Denn wenn die Zeiten gleich sind, verhalten sich die Geschwindigkeiten, wie die durchlaufene Räume, das ist, wenn ein Körper in einer Minute 2mal, 3mal, &c. so weit komt, als ein anderer in gleicher Zeit, so ist auch seine Geschwindigkeit 2mal, 3mal &c. so gros als des andern.

Die 45. Aufgabe.

§. 124 Aus der gegebenen Geschwindigkeit zweyer Körper, die sich gegen einerley Gegend bewegen, und ihrer Weite von einander den Raum zu finden, den der Langsamere noch durchzulaufen hat, bis er von dem Geschwinderen eingeholet wird.

Auflösung.

Die Weite sey $= a$
die Geschwindigkeit des Langsameren verhalte sich zu der
——Geschwindigkeit des Geschwinderen, wie b zu c
der gesuchte Raum seye $= x$
daher hat der Geschwindere zu durchlaufen $a + x$
der Langsamere aber x
weil nun dieses in gleicher Zeit geschehen soll, so ist (§. 123.).

$$b : c = x : a + x$$
$$cx = ab + bx$$
$$bx \qquad bx$$
$$cx - bx = ab$$
$$c - b \qquad c - b$$
$$x = ab : c - b)$$

Die Weite sey 150 Schuh, die Geschwindigkeiten seyen 7 und 4, so ist der gesuchte Raum 150. 4: (7 — 4.) = 600 : 3 = 200.

Der 1. Zusatz.

§. 125. Die Aequation $x = ab : (c - b)$ giebt fol-

folgende Proportion $c-b:b=a:x$, das ist, wie sich die Differenz der Geschwindigkeiten zur kleineren Geschwindigkeit verhält, so verhält sich die Entfernung zu dem gesuchten Raum.

Der 2. Zusatz.

§. 126. Weil der geschwindere Körper $a+x$ durchlaufen muß, so muß er auch durchlaufen $a+ab:(c-b)$, oder $(ac-ab+ab):(c-b)$, oder $ac:(c-b)$, welches auch in eine Proportion, wie §. 125, verwechselt werden kann.

Anmerkung.

§. 127. Man darf sich nicht befremden lassen, daß die Proportion (§. 124.) $b:c=x:a+x$ in die Aequation $cx=ab+bx$ verwandelt worden; weil aus der gemeinen Rechenkunst bekannt, daß bey einer Proportion das Product der beyden äussern Glieder dem Product der beyden mittleren gleich sey. Es läßt sich dieses durch Buchstaben sehr leicht erweisen, das erste Glied sey $=a$, der Exponent $=m$, so ist das zweyte Glied $=am$; es seye das dritte $=b$, so ist das vierte $=bm$, folglich ist

$$a:am=b:bm$$
$$\underline{\quad b \qquad\quad a \quad}$$
$$amb=amb$$

Die 46. Aufgabe.

§. 128. Ein Haas hat 780 Sprünge vor einem Hund voraus; der Hund, der ihn verfolgt, thut 4 Sprüng bis der Haas 3 thut, und 7 Haasensprüng betragen 5 Hundssprünge. Wie viel

Sprünge hat der Haas noch zu thun, bis ihn der Hund einholt?

Auflösung.

Könnte man die Geschwindigkeiten des Haasens und des Hundes mit einander vergleichen, so liesse sich diese Aufgabe auf vorige bringen. Diese Vergleichung geschicht folgendergestalt: Der Hund legt mit 5 Sprüngen so viel Raum zurück, als der Haase imit 7. In dieser Bedeutung gleichen 5 Hundssprünge 7 Haasensprüngen; oder: 1 Hundssprung $= \frac{7}{5}$ Haasensprüngen. Nun thut der Hund 4 Sprünge in der Zeit, da der Haase 3 thut; der Hund legt also einen Raum von $4 . \frac{7}{5}$ Haasensprüngen in der Zeit zurük, in welcher der Haase einen Raum von 3 seiner Sprünge zurük legt. Also verhalten sich die Geschwindigkeiten des Hundes und des Haasens $= \frac{4 . 7}{5} : 3$. Der Haase ist also der Langsamere unter den beyden (124. §.) und man setze in dasiger Gleichung, wo x gefunden wird, $b = 3$; $c = 4.7 : 5$; $a = 780$, so ist $c - b = \frac{4.7}{5} - 3$ und $x = 780.3 : (\frac{4.7}{5} - 3)$ oder $= 780.3 : \frac{(4.7 - 3.5)}{5}$ das ist $\frac{780.3.5}{28 - 15} = \frac{780.3.5.}{13}$ Nun ist $780 = 390.2 = 130.3.2 = 13.10.3.2 = 13.60$ also $\frac{780.3.5}{13} = 13.$

$= \frac{13.60.3.5}{13} = 60.3.5 = 900$, so viel Sprünge hat der Haase noch zu thun.

Anmerkung.

§. 129. In der Formul für $x = 780.3 : (\frac{4.7}{5} - 3)$ ist, die Rechnung mit den Zahlen nur durch Zeichen angedeutet, nicht wirklich verrichtet worden, weil man auf diese Art leicht allgemeine Regeln für andere Zahlen, die statt der vorigen gesetzt wurden, entdecket. Die Regeln wären diese: 1) Man berechne, wie viel ein Hundssprung in Haasensprüng ausgedruckt beträgt (hier $\frac{7}{5}$). Dieses multiplicire man mit der Zahl, welche anzeigt, wie viel Sprünge der Hund (hier 4) in der Zeit thut, in welcher der Haase auf eine gegebene Menge Sprüuge (hier 3) thut. 2) Hievon subtrahire man die gegebene Menge der Haasensprünge, die in eben der Zeit mit dem Hundssprunge geschehen (hier 3). 3) Man spreche, wie diese Differenz zu der in 2) gegebenen Menge der Haasrnsprünge, so die Sprünge, die der Haase im voraus hat, zu einer vierten Zahl. Die vierte Zahl ist, was man sucht. Was in Worten so weitläuftig gesagt wird, stellen die Zeichen einem einzigen Blicke dar. Will man statt der bestimmten Zahlen die Aufgabe in Buchstaben ausdrucken, so setze man a statt 780; b statt 4; c statt 3, (da aber dieses b und c nicht das bedeuten, was sie in (124. §.) bedeuten) d statt 7; f statt 5; so ist $x = ac : (\frac{bd}{f} - c)$. Man multiplicire Divisor nnd Dividendus mit f, so komt $x = acf : (bd - fc)$. Auch in

besondern Exempeln ist es vortheilhaft, die Rechnung mit den Zahlen nicht sogleich zu machen, sondern nur anzudeuten, weil man da leichter sieht, was für Zahlen sich durch die Division u. s. w. aufheben. So gefällte man im jetzigen Exempel 780 in 390. 2, welches leicht bewerkstelliget wird, wenn man in Gedanken 780 mit 2 dividirt. Alsdenn ist leicht zu übersehen, daß 390 = 130. 3 u. s. w. Man findet also für den Wehrt von x; leichter 900, als wenn man ohne diese Factoren den Divisor und Dividendus gemeinschaftlich weggelassen, und mit gewissen Zahlen wirklich gerechnet hätte.

Der 1. Zusatz.

§. 130. Weil der Hund durchlaufen muß $a + x$, so durchlauft er auch $a + acf : (bd - fc) = (abd - afc + afc) : (bd - fc) = abd : (bd - fc)$.

Der 2. Zusatz.

§. 131. Weilen $abd : (bd - fc)$ den Lauf des Hunds in Haasensprüngen vorstellt, und die Haasensprünge sich zu den Hundssprüngen verhalten, wie d zu f, so ist $d : f = abd : (bd - fc) : abf : (bd - fc)$ das ist, der Hund hat $abf : (bd - fc)$ oder $ab : (bd : f - c)$ Sprünge zu thun.

Anmerkung.

§. 132. In vorstehender Aufgabe kommen 6 Zahlen vor, davon auch eine jede unbekannt, und die übrige bekannt seyn können, woraus 6 Aufgaben entstünden, (§. 122.) die man aber zu formiren dem geneigten Leser überläßt.

Die 47. Aufgabe.

§. 133. Zween Boten gehen gegen einander: zu

zu bestimmen, wenn sie einander begegnen, aus der gegebenen Weite der Oerter, beyder Tagreisen und der Zeit, um welche einer früher gehet als der andere.

Auflösung.

Die Zeit, um welche der erste früher ausgehet als der andere sey $= a$.
Die Tagreise des ersten $= b$.
des andern um n grösser oder kleiner, dahero $b + n$. oder $b - n$.
Die Weite der Oerter $= d$.
Die Zeit, da der andere ausgehet, bis sie einander begegnen $= x$.
Daher ist die Zeit des ersten $= a + x$

$$\begin{array}{lrl} & & b \\ \hline \text{dessen Weg} & & = ab + bx \\ \text{der Weg des andern} & = & bx + nx \\ \hline & & ab + 2bx + nx = d \\ & & ab \qquad\qquad\quad ab \\ \hline & & 2bx + nx = d - ab \\ & & 2b + n \qquad 2b + n \\ \hline & & x = \frac{d - ab}{2b + n} \end{array}$$

Es seye $a = 3$, $b = 5$, $n = 1$, $d = 92$, so ist $x = (92 - 3, 5) : (2.5 + 1) = (92 - 15) : 11 = 77 : 11 = 7$.

Der 1. Zusatz

§. 134. Gehen sie zu gleicher Zeit aus, so wird $a = o$ und $(d - ab) : (2b + n) = (d - ob) : (2b + n) = d : (2b + n)$.

Der 2. Zusatz.

§. 135. Ist die Zeit der Zusammenkunft bekannt, und man will die Tagreis des ersten wissen, so siehet man nur b als unbekannt, x aber als bekannt an, und sucht b auf eine Seite zu bringen.

$$ab + 2bx + nx = d$$

$$nx \qquad nx$$

$$ab + 2bx = d - nx$$

$$a + 2x \qquad a + 2x$$

$$b = \frac{d - nx}{a + 2x}$$

Der 3. Zusatz.

§. 136. Wäre alles bekannt, und hätte man nur noch zu finden, wie viel einer des Tags weiter gegangen wäre als der andere, müßee n auf eine Seite gebracht werden.

$$ab + 2bx + nx = d$$

$$nx = d - ab - 2bx$$

$$n = \frac{d - ab - 2bx}{x}$$

Der 4. Zusatz.

§. 137. Eben so kan man finden, um wie viel der erste früher ausgegangen.

$$ab + 2bx + nx = d$$

$$ab = d - 2bx - nx$$

$$a = \frac{d - 2bx - nx}{b}$$

Der 5. Zusatz.

§. 138. Wäre des andern Tagreise um n kleiner als des ersten, so wäre sie $b - n$. Woraus erhellet, daß in diesem Fall n allezeit das gegenseitige Zeichen haben müsse, als § 133. statt $x = (d - ab) : (2b + n)$, $x = (d - ab) : (2b - n)$ und §. 135. $b = (d + nx) : (a + 2x)$ .c. 2c.

Anmerkung.

§. 139. In dieser an sich sehr leichten Aufgabe sind mit Vorbedacht fast alle mögliche Fälle noch einmal, wie (§. 122.), zusammen gezogen, und die besondere Fälle daraus hergeleitet worden, um die Anfänger nach und nach vorzubereiten, ein gleiches in schwereren Aufgaben anzuwenden. Man siehet hieraus, daß in besondern Fällen einige Grössen $= 0$ (§. 134.) imgleichem $+$ und $-$ verwechselt (§. 138.) werden können, nicht weniger, daß eine einige Aequation sehr viele Aufgaben aufzulösen hinreiche. Eben so wird man unvermerkt angewöhnt, auch in andern nicht in die Mathematik einschlagenden Dingen alle Fälle aus allgemeinen Sätzen herzuleiten, daß einem keiner leicht entwischet.

Die 48. Aufgabe.

§. 140. Aus dem gegebenen Preis einer Maas guten Weins zu bestimmen, wie viel von einem geringeren, dessen Preis auch bekannt, darunter gemischet werden müsse, daß er um einen verlangten Preis gegeben werden könne.

Auflösung.

Der Preis des guten seye $= a$
des geringern $= b$
der verlangte mittlere Preis $= c$
weil weder von dem guten noch schlechten eine ganze Maas genommen werden kan, sondern von jedem nur ein Theil oder ein Bruch, so sey ein solcher Theil von dem guten $= x$.
so muß von dem geringern das übrige, bis es ein Ganzes oder 1 gibt, genommen werden, das ist $1 - x$.
gilt nun ein Maas vom geringern b, so gilt $1 - x$
$b - bx$.
auf gleiche Art vom guten ax
beyde zusammen $b - bx + ax = c$

$$\begin{array}{r} b - bx + ax = c \\ b \qquad\qquad\quad b \\ \hline ax - bx = c - b \\ a - b \qquad a - b \\ \hline x = \dfrac{c - b}{a - b} \end{array}$$

vom geringern $1 - x$ oder $1 - (c + b) : (a - b) = (a - b - c + b) : (a - b) = (a - c) : (a - b)$.
es seye $a = 32$ kr. $b = 18$, $c = 24$, so ist $x = (24 - 18) : (32 - 18) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$, der geringere $= (32 - 24) : (32 - 18) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.

Der 1. Zusatz.

§. 141. Weil nun die Grösse des guten $= (c - b) : (a - b)$, des geringern $= (a - c) : (a - b)$, so verhalten sie sich, wie $(c - b) : (a - b)$ zu $(a - c) : (a - b)$ oder $c - b : a - c$, das ist, wenn der gute sich zum geringern ver-

verhält, wie die Differenz des mittleren und geringeren Preises zur Differenz des mittleren und höheren Preises, so hat man den verlangten Preis. Als in vorigem Exempel 24—18 : 32—24, oder 6 : 8, das ist, vom guten 6, vom schlechten 8, oder 3 und 4.

Der 2. Zusatz.

§. 142. Will man Wasser an statt des geringeren unter den guten mischen, welches nichts gilt, so ist $b=0$ und $x=(c-0):(a-0)=c:a$, folglich von dem Wasser $1-c:a=(a-c):a$, daß sich das Wasser zum Wein verhält, wie $(a-c):a$ zu $c:a$ oder $a-c$ zu c.

Die 1. Anmerkung.

§. 143. Daß eben diese Aufgabe auch auf andere zu vermischende Dinge angewendet werden könne, wird man leicht einsehen. Als gut und geringer Silber zu mischen, wobey aber zu merken, daß das Silber nach der Mark oder 16 Loth geschätzt werde, daß, so in 16 Lothen 13 Loth Silber und 3 Loth Kupfer, solches 13löthig Silber genennet werde, das unter das Silber gemischte Kupfer aber wird angesehen, als hätte es keinen Wehrt.

Die 2. Anmerkung.

§. 144. Hieher gehöret auch Archimedis Kronenprobe. König Hiero gab einem Goldschmidt 18 Pfundt Gold, eine Krone daraus zu verfertigen. Die Krone hatte zwar das Gewicht, man merkte aber, daß Silber darunter gemischt sey. Dem Archemedi wurde aufgetragen, die Sache zu untersuchen. Er fande, daß ein Körper, wenn er ins Wasser gehänget worden, etwas weniger wäge, nemlich so viel, als das Wasser gewogen, dessen Platz er eingenommen;

nommen; nun aber nimmt ein Pfundt Gold weniger Platz ein als ein Pfundt Silber, weil jenes von schwererer Art ist als dieses, dahero verliehrt auch jenes weniger von seinem Gewicht im Wasser als dieses, ein aus beyden vermischtes aber mehr als Gold, und weniger als Silber wie daraus zu finden seye, wie viel von jedem in dem ganzen Klumpen enthalten, wollen wir in folgendem sehen.

Die 49. Aufgabe.

§. 145. Aus dem gegebenen Gewichte eines aus zweyerley Metallen zusammen geschmolzenen Klumpens, und wie viel solcher am Gewicht verliehrt, desgleichen wie viel ein jedes gleich schweres vor sich ungemischt im Wasser verliehrt, zu finden, wie viel von jedem Metalle in dem Klumpen sey?

Auflösung.

Der Klumpe woge $= p$
er verliere im Wasser c
das schwerere Metall von gleichem Gewichte verliehre $= a$
das leichtere $= b$
der Theil von dem leichteren sey $= x$
so ist der Theil vom schwerern $= p - x$
wenn nun das Gewicht p vom leichtern b verliehrt, so verliehrt x, $bx : p$
desgleichen verliehret der Theil des schwerern $(ap - ax) : p$
beyde zusammen $(bx + ap - ax) : p = c$

$$\underline{\quad p \qquad\quad p \quad}$$

$$bx + ap - ax = pc$$

$$\underline{\quad ap \qquad\quad ap \quad}$$

$$(b - a)x = (c - a)p$$

$$(b-a)\,x=(c-a)p$$
$$\underline{b-a \qquad\quad b-a}$$
$$x=(c-a)p:(b-a)$$

das schwerere wird seyn $p-(pc+pa):(b-a)=(bp-ap-pc+pa):(b-a)=(bp-cp):(b-a)=(b-c)p:(b-a)$

Gesetzt die Krone wog 18 Pfundt, und verlohr in Wasser $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ Pfundt; aber 18 Pfundt Gold verliehren 1 Pfundt; und 18 Pfundt Silber $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ Pfundt, so ist $p=18$; $c=\frac{4}{3}$; $a=1$; $b=\frac{3}{2}$; und $x=$

$$\frac{(\frac{4}{3}-1)\,18}{\frac{3}{2}-1}=\frac{\frac{1}{3}.\,18}{\frac{1}{2}}=\frac{2.\,18}{3}=2.\,6=12;$$ so viel Pfundt Silber waren in der Krone, und $18-12=6$ Pfundt Gold.

Probe. Man suche, wie viel 12 Pfundt Silber im Wasser verliehren, durch folgende Proportion: $18:12=\frac{3}{2}:\frac{3.12}{2.18}$ Weil diese vierte Zahl $=1$, so werden von 12 Pfundt Silber 1 Pfundt verlohren. Es ist nemlich $\frac{3}{2}$ Pfundt oder der Verlust, den 18 Pfundt Silber im Wasser leiden, der zwölfte Theil von 18 Pfundt. Eben so ist der Verlust, den 18 Pfundt Gold leiden, der achtzehende Theil von 18 Pfundten; folglich werden 6 Pfundt Gold auch ihren achtzehenden Theil, nemlich $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$ Pfundt verliehren. Die 12 Pfundt Silber und die 6 Pfundt Gold zusammen verliehren also $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ Pfundt, wie gehörig.

Die-

Diese Rechnung setzt zum voraus, daß wenn 12 Pfundt Silber und 6 Pfundt Gold mit einander vermischt sind, jenes 1 Pfundt, dieses $\frac{1}{3}$ Pfundt verliehren wird, eben wie jedem wiederfuhre, wenn es mit dem andern unvermischt wäre. Diese Voraussetzung aber muß geprüft werden und die Prüfung wird sie nicht bestätigen. Man sehe Kästners Anfangsgründe der angewandten Mathematik; Hydrostatik 54 §. nach denen daselbst 49. §. angegebenen Zahlen wird für den Verlust des Goldes und des Silbers etwas anders gesetzet.

Zusatz.

§. 146. Also verhält sich das leichtere zum schwereren, wie $(c—a)\,p : (b—a)$ zu $(b—c)\,p : (b—a)$ oder $c—a : b—c$.

Die 50. Aufgabe.

§. 147. **Die Eigenschaften des Quadrats zu finden, wenn die Wurzel zwey Theile hat.**

Auflösung.

Die zwey Theile seyen a und b, so ist die Wurzel

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline + ab + bb \\ aa + ab \quad\;\; \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

Hieraus ist klar, daß das Quadrat drey Theile habe, wenn die Wurzel zwey hat. 1) Das Quadrat des ersten Theils aa. 2) Das doppelte Product des ersten a, in den andern b, $2ab$. 3) Das Quadrat des 2 Theils bb.

An-

Anmerkung.

§. 148. Wie daraus die Regeln aus einer jeden Zahl die Quadratwurzel zu ziehen gefunden werden, wird in der gemeinen Rechenkunst gelehret.

Zusatz.

§. 149. Hätte die Wurzel 3 Theile, als $a+c+d$, so würde an statt b stehen $c+d$, dahero müßte das Quadrat von $a+c+d$ bestehen 1) aus dem Quadrat $a=a^2$, 2) aus $2a$ in $c+d=2ac+2ad$, 3) aus dem Quadrat von $c+d=c^2+2cd+d^2$.. Woraus erhellet, daß einer dreytheiligen Wurzel Quadrat bestehe aus den Quadraten eines jeden Theils und den doppelten Producten eines jeden Theils in jeden andern, welche Regel von allen vieltheiligen Wurzeln gilt, wie eben so leicht zu zeigen ist.

Die 9. Erklärung.

§. 150. Eine unreine quadratische Gleichung ist, in welcher die unbekannte Grösse die erste und zweyte Dignität hat. Dergleichen sind:

A $x^2-16x+55=0$

$B)$ $x^2=4x+21$;

$C)$ $x^2=px+q$

Man könnte solche Gleichungen folgendergestalt bekommen: Wenn man von einer willkührlichen Zahl, z. E. 7, das Quadrat 49 machte; und eben so sie mit einer willkührlichen Zahl, z. E. 4, multiplicirte; und nun suchte, um wie viel das Quadrat grösser ist, als das vierfache, so würde man finden, daß $7.7=4.7+21$. Man könnte also einem andern das arithmetische Rätzel aufgeben:

geben: Eine Zahl zu finden, deren Quadrat heraus kömt, wenn man 21 zu ihrem Vierfachen addirt. Dieses Räzel in der algebraischen Sprache ausgedruckt, ist die Gleichung *B*).

Eben so könnte man durch einen Versuch gefunden haben, daß der Zahl 5 ihr Quadrat übrig bleibt, wenn man 55 von ihrem Sechszehnfachen abzieht, das ist, daß $5.5 = 16.5 - 55$ oder auf beyden Seiten 55 addirt $5.5 + 55 = 16.5$ und auf beyden Seiten 16.5 abgezogen, $5.5 - 16.5 + 55 = 0$, welches in eben dergleichen algebraisches Räzel verwandelt, die Gleichung *A*) giebt,

Weil man durch addiren und subtrahiren allemal, welche Glieder der Gleichung man will, auf eine oder die andere Seite des Gleichheitszeichen bringt (§. 71.), so läßt sich jede unreine quadratische Gleichung auf die Art, wie *C*), ausdrucken.

Nun können p, q, was für Zahlen man will, bejahte oder verneinte bedeuten, und so stellt *C*) jede unreine quadratische Gleichung vor.

Ist nemlich $p = 4$, $q = 21$, so verwandelt sie sich in *A*; mit der muß man folgende Vorbereitung machen:

$$x^2 - 16x + 55 = 0$$
$$16x = 16x \text{ addirt}$$
$$x^2 + 55 = 16x$$
$$55 = 55 \text{ abgezogen}$$
$$x^2 = 16x - 55$$

Diese Gleichung nun wird aus *C*, wenn $p = +16$, $q = -55$

Eine bekannte Grösse, welche mit irgend einer Potenz der unbekannten multiplicirt ist, heißt ein Coefficient.

In

In *A* sind die Coefficienten: 1 beym Quadrate, —16 bey der ersten Potenz, + 55 bey x^0 (§. 60.). In *B* sind sie: 1 beym Quadrate, 4 bey der ersten Potenz 21, bey der deren Exponent $=0$. In *C* sind sie: 1 bey der zweyten, *p* bey der ersten, *q* bey der deren Exponent $=0$.

Die 51. Aufgabe.

§. 151. **Eine unreine quadratische Gleichung aufzulösen.**

Auflösung.

I. Zur Vorbereitung ist zu zeigen nöthig, wie reine quadratische Gleichungen aufgelöset werden, wo nemlich allein das Quadrat der unbekannten Grösse, nicht ihre erste Potenz enthalten ist, wie §. 106. 107. 109. 112.

Man suche nemlich die Zahl *f*, deren Quadrat $=f$, also $z^2=f$, so ist $z=\sqrt{f}$.

Diese Quadratwurzel aus *f* mag als bejaht oder als verneint angesehen werden, so gibt sie beydemale einerley bejahtes Quadrat (§. 41.). Folglich ist *z* entweder $+\sqrt{f}$, oder $-\sqrt{f}$, welches man so ausdruckt: $z=\pm\sqrt{f}$.

Exempel. Man suche die Zahl, deren Quadrat 25 ist, oder es sey $z^2=25$, so ist $f=25$, $\sqrt{f}=5$, und $z=+5$, nemlich $(+5)^2=+25$, und auch $(-5)^2=+25$.

II. Es gibt Fälle, wo die Natur der Frage nicht verstattet, die Zahl, die man sucht, für verneint anzunehmen. So wäre im 106. §. $(-15)^2$ eben so wohl $+225$ als $(+15)^2$ und im 107. §. entsteht das Quadrat $+4$ eben so wohl von -2 als von $+2$. Aber weder die Menge der Hauptleute, noch die Breiten verneint seyn. Also entscheidet hier die besondere Bedeu-

tung der Zahlen etwas, das die blos authentische Auflösung unbestimmt liesse; nemlich in den beyden Gleichungen $225 = x^2$, $x^2 = 4$, kann x so wohl was bejahtes als verneintes bedeuten; aber eine verneinte Grösse kann das nicht bedeuten, was in den Aufgaben gesucht wird.

III. Manchmal ist es gleichgültig, wo man den bejahten oder den verneinten Wehrt brauchen will. Im 110. §. sollte man eigentlich schliessen: $x = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)}$ das obere Zeichen gäbe.

Die grössere Zahl $= \frac{1}{2}x + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$
„ „ kleinere „ $= \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$

Das untere Zeichen gäbe

$\frac{1}{2}a + x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$
$\frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)}$ (§. 35.).

das ist $\frac{1}{2}a + x$ wurde nun die kleinere, $\frac{1}{2}a - x$ die grössere, weil x etwas verneinendes bedeutet.

IV. Bey solchen Umständen wie II, III, muß man doch den Grund anzugeben wissen, warum man von den beyden Wehrten der unbekannten Grössen nur den bejahten braucht. In anderen Fällen aber erhält man nicht alle Zahlen, die der Frage genug thun, wenn man nicht auf diese Zweydeutigkeit der Wurzel acht gibt. So ist eigentlich im 112. §. $x = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + b)}$; das untere Zeichen gibt für die dorten gesuchten Zahlen zwo verneinte. Im dortigen Exempel ist $x = \pm 8$, und bey deren Gebrauche des untern Zeichens, die eine Zahl $-8 + 6 = -2$; die andere $-8 - 6 = -14$. Dieser beyden Zahlen halbe Summe ist -8; ihre Differenz ist, was heraus kömt, wenn man -14 von -2 abzieht, oder $-2 = (-14) = +12$ (§. 37.). Ihr Product $-14 . -2 = +28$ (§. 47.).

Die Differenz zu finden, ziehe ich —14 von —2 ab, weil —14 für kleiner als —2 anzusehen ist. Von zwo negativen Zahlen ist nemlich die grössere negative als kleinere anzusehen. Dieses gründet sich darauf. Kleinere heißt dasjenige, wozu was hinzu kommen muß, also was bejahtes addirt werden muß, das grössere zu erhalten. So ist 5 kleiner als 12, weil 7 zu 5 kommen muß, wenn 12 zu erhalten. Wenn man nun —14 in —2 verwandeln will, so muß man +12 zu —14 addiren, das ist, es muß +12 zu —14 kommen, damit daraus —2 wird. Also ist —14 kleiner als —2. Diese Bemerkung, daß eine grössere negative Zahl, kleiner als die nicht so grosse negative ist, hat überall ihren Nutzen, wo man kleinere und grössere Zahlen gegen einander hält. In eben der Bedeutung sagt man: jede verneinte Grösse sey weniger als Nichts, weil man zu ihr etwas addiren muß, um Nichts zu bekommen. Z. E. Zu —3 muß +3 addirt werden, so ist —3 + 3 = 0. Und noch vielmehr also, ist jede verneinte Grösse, kleiner als jede bejahte, da die bejahte allemal mehr als Nichts ist. So ist —10 kleiner als +2, denn man muß +12 zu — 10 addiren, um +2 daraus zu machen.

V. Eben aus §. 41. folgt, daß jedes Quadrat eine bejahte Grösse ist. Ein verneintes Product entstehet aus zween Factoren, nur wenn sie entgegen gesetzte Zeichen haben, und da sind sie nicht einerley, wenn sie auch sonst einerley nur entgegen gesetzte Grössen hätten. So ist +5. —5 = —25; aber kein Quadrat, denn +5 ist nicht einerley mit —5; so wenig es einerley ist, 5 Thaler zu besitzen, und 5 Thaler schuldig seyn. Wenn also nicht +5 = —5: so ist —25 kein Product aus zween gleichen Factorn.

VI. Wer also eine verneinte Grösse ein Quadrat

nennt, der sagt etwas, das sich selbst widerspricht. Wer das z in der Gleichung $z = -25$ anzugeben verlangt, der verlangt was Unmögliches. Man würde dieses so ausdrücken: $z = +\sqrt{-25}$. Eine Quadratwurzel aus einer verneinten Grösse ist also nichts, als ein Zeichen ohne Begriff. Es heisst: eine unmögliche Grösse (quantitas imaginaria).

VII. Wenn man bey Auflösung einer Aufgabe auf solche unmögliche Grössen komt, so zeigt dieses an, es werde was unmögliches verlangt. Dergleichen wäre im 109. §. wenn $\frac{1}{4}aa < b$. Man fand nemlich in der Rechnung, welche zu der dasigen Auflösung führte, $\frac{1}{4}aa - xx = b$; nun ist xx allemal etwas bejahtes (V), also allemal $\frac{1}{4}aa - xx < \frac{1}{4}aa$ (§. 29.). Weil also b heraus kömt, wenn man $\frac{1}{4}aa$ um was vermindert, so ist allemal $\frac{1}{4}aa > b$

Man setze $a = 12$; $b = 52$; so wäre $x = \sqrt{(36 - 52)} = \sqrt{-16}$. Weil nun -16 kein Quadrat seyn kan, so kan es auch keine Zahlen geben, deren Summe 16; das Product 52 wäre.

VIII. Nun kann man zu Auflösung der unreinen Gleichungen schreiten. Es wird, der Deutlichkeit wegen, gut seyn, zuerst ein Exempel vorzunehmen.

IX. Bey der Gleichung (A) verfahre man so:

$$x^2 - 16x + 55 = 0$$
$$55 = 55 \text{ abgezogen}$$
$$x^2 - 16x = -55$$

Unter dieser Gestalt sagt die Gleichung folgendes: Die unbekannte Grösse sechszehenmal genommen, sey um 55 grösser als ihr Quadrat. Man nehme die Hälfte des Coefficienten (§. 150.) bey x, sie ist -8; und nun mache man das Quadrat $x - 8$. Es ist $x^2 - 16x + 64$ (§. 147.). Man würde also $x^2 - 16x$ in dieses Quadrat

drat verwandeln, wenn man $+64$ dazu addirte. Aber die Gleichheit zu erhalten, muß man eben diese 64 zu -55 addiren. So steht die Rechnung folgendergestalt:

$$x^2 - 16x = -55$$
$$+64 = +64 \text{ addirt}$$
$$x^2 - 16x + 64 = 64 - 55 = +9$$
das ist
$$(x-8)^2 = 9$$
$$x - 8 = \pm\sqrt{9} \text{ oder}$$
$$x - 8 = \pm 3$$
$$8 = 8 \text{ addirt}$$
$$x = 8 \pm 3$$

Dieses gibt also x entweder $= 11$ oder $= 5$. Wer also die Gleichungen, wie 150. §. beschrieben worden, durch einen Versuch mit der 5 gefunden hätte, und sie als ein Rätzel aufgäbe, der würde zu seiner Verwunderung finden, daß die Antwort auf sein Räzel nicht nur 5, sondern auch 11 ist. Denn $11^2 - 16.11 + 55 = 121 - 176 + 55 = 0$

X. Aus dem Verfahren mit diesem Exempel kann man leicht die allgemeine Methode einsehen. Die beyden Theile der Gleichungen, welche der unbekannten Grösse Quadrat und ihre erste Potenz enthalten, sehe man als zwey Glieder eines Quadrats an, dessen Wurzel aus der unbekannten Grösse und einer bekannten bestünde. Diese bekannte muß die Hälfte des Coefficienten bey x seyn, bejaht oder verneint, wie derselbe ist. Man macht also das Quadrat dieser Hälfte, und addirt solches zu den beyden Theilen der Gleichung, welche der unbekannten Grösse Quadrat und ihre erste Potenz enthalten. So machen diese beyde Theile mit dem, was

man dazu addirt, zusammen ein Quadrat aus, dessen Wurzel die unbekannte Grösse und die Hälfte des Coefficienten bey x sind. Um nun die Gleichheit zu erhalten, muß man das Quadrat des halben Coefficienten auch zu der bekannten Zahl addiren, die man zuvor auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, den unbekannten gegen über, gebracht hat.

XI. Nach diesen vorläufigen Betrachtungen wird man verstehen können, wie mit der Gleichung zu verfahren ist, die alle quadratische vorstellt. (150.).

$$x^2 = px + q$$
$$px = px \text{ abgezogen}$$
$$x^2 - px = q$$

Man suche, was auf der linken Seite muß addirt werden, ein vollkommenes Quadrat zu erhalten. Dieses heraus zu bringen, mache man $(x+e)^2 = x^2 + 2ex + e^2$ (§.147, und setze, es soll $2ex = -px$ seyn, so ist $2e = -p$, und $e = -\frac{1}{2}p$; und $x + e = x - \frac{1}{2}p$. Man muß also das Quadrat von $x - \frac{1}{2}p$ machen, dieses ist $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2$. Hierinn nun $x^2 - px$ zu verwandeln, verfährt man so:

$$x^2 - px = q$$
$$\tfrac{1}{4}pp = \tfrac{1}{4}pp \text{ addirt}$$
$$x^2 - px + \tfrac{1}{4}pp = \tfrac{1}{4}pp + q$$

oder

$$(x - \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}pp + q$$

auf beyden Seiten die Wurzel ausgezogen

$$x - \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + q)}$$
$$\tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}p \text{ addirt}$$
$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + q)}$$

Nach welcher Formel alle quadratische Gleichungen aufgelöst werden, wenn man nur statt p, q, die gehörigen Wehrte setzt.

Im A (§. 150.) ist $p = 16$; $q = -55$; also $(\frac{1}{2}p)^2$ oder $\frac{1}{4}pp = 64$; und $\frac{1}{4}pp - q = 64 - 55 = +9$ folglich $x = 8 \pm \surd 9$ wie in IX. Vermöge der gegenwärtigen Rechnung mit den Buchstaben erspart man sich die Mühe, die Rechnung für jedes Exempel in Zahlen besonders zu wiederholen.

In B (§. 150.) ist $p = 4$; $q = 21$.
Also $\frac{1}{4}pp + q = 4 + 21 = 25$; die Quadratwurzel daraus $= 5$; also $x = 2 \pm 5$ oder ein Wehrt von x ist $= 7$; der andere $- 3$; nemlich

$+7.7. = 4.7 + 21$ und

$(-3)^2 = 4. - 3 + 21$ weil $4. - 3 = -12$

und $-12 + 21 = +9$

Zusatz.

§. 152. In jeder quadratischen Gleichung hat die unbekannte Grösse zweene Wehrte; beyde möglich, wenn $\frac{1}{4}pp + q$ bejaht; beyde unmöglich, wenn diese Grösse verneint ist. Nun ist $\frac{1}{4}pp$ das Quadrat der Hälfte des Coefficienten bey x; allemahl bejaht, der Coefficient mag bejaht oder verneint seyn. (151. V) ist also die völlig bekannte Zahl q bejaht, (wie in B;) so sind allemal beyde Wurzeln möglich. (Es versteht sich, daß die Gleichung die Form hat, wie C in 150.) Ist aber die gegebene Zahl q was verneintes (wie in A) so muß sie kleiner als das Quadrat des halben Coefficienten seyn, wenn beyde Wehrte von x möglich und unterschieden seyn sollen. Ist sie gerade so groß, so sind beyde Wehrte gleich; ist sie grösser, so sind beyde unmöglich.

Exempel für gleiche Wehrte: $x^2 = 6x - 9$; wo $\frac{1}{2}p = 3$; $q = -9$ und $x = 3 \pm \surd(9-9) = 3$

Diese Gleichung ist nemlich so viel als
$x^2 - 6x + 9 = 0$ oder $(x-3)^2 = 0$

Exempel für unmögliche Wehrte:
$x^2 = 8x - 20$; wo $p = 8$; $q = -20$;
$x = 4 \pm \sqrt{(16-20)} = 4 \pm \sqrt{-4}$. Es gibt also keine Zahl, deren Quadrat heraus käme, wenn man 20 von ihrem achtfachen abzieht.

Die 52. Aufgabe.

§. 153. Ein Hauptmann theilt 1200 fl. unter seine Soldaten, und ein anderer auch so viel fl. unter die Seinigen. Der letzte hatte 40 Soldaten weniger als der erste, daher bekömt jeder von des letzten Soldaten 5 fl. mehr, als jeder von des ersten seinen. Wie viel Soldaten hatte der erste und der andere? und wie viel bekam jeder Soldat?

Auflösung.

Gesetzt, der zweyte hatte x Soldaten, so hatte der erste $x + 40$.

Jeder von des zweyten Soldaten bekam $\frac{1200}{x}$

Jeder von des ersten $\frac{1200}{x+40}$

Was jeder von des zweyten seinen bekam, ist um 5 mehr, als was jeder von des ersten bekam;

also $\frac{1200}{x} = \frac{1200}{x+40} + 5$

Bey-

Beyderseits mit x multiplicirt

$$1200 = \frac{1200x}{x+40} + 5x$$

Beyderseits mit $x+40$ multiplicirt

$$1200.(x+40) = 1200x + 5x.(x+40)$$

Die Producte wirklich gemacht

$$1200x + 1200.40 = 1200x + 5x^2 + 5x.40.$$

$1200x = 1200x$ abgezogen, und die Producte in Zahlen gemacht.

$$48000 = 5x^2 + 200x$$

$$200x = 200x \text{ abgezogen.}$$

$$48000 - 200x = 5x^2$$

welches man ohne Zweifel auch so schreiben kan:

$$5x^2 = -200x + 48000$$

Hier beyderseits mit 5 dividirt.

$$x^2 = -40x + 9600$$

Also ist in 151; XI.

$$p = -40;\ q = +9600$$

daher $\frac{1}{4}p^2 = +400$; und

$$\tfrac{1}{4}pp + q = 400 + 9600 = 10000$$

und $x = -20 \pm \sqrt{10000}$

$$= -20 \pm 100$$

also das obere Zeichen gebraucht:

$x = 80$ so viel hatte der zweyte und der erste 120.

Jeder von des zweyten Soldaten bekam $\frac{1200}{80} = 15$

Jeder von des ersten $\frac{1200}{120} = 10.$

Weil die Menge der Soldaten nicht verneint seyn kan, braucht man das obere Zeichen bey der Quadratwurzel, das untere gäbe $x = -120$ und $x + 40 = -80$ also eben die vorigen beyden Zahlen nur verneint.

Aus diesem Exempel wird man sehen, wie mit der Gleichung zu verfahren ist, wenn der unbekannten Grösse Quadrat einen andern Coefficienten als 1 hat, wie hier 5 der Coefficient war. Man dividirt nemlich mit diesem Coefficienten alle Glieder der Gleichung. Und so läßt sich jede Gleichung dergestalt einrichten, daß die höchste Potenz der unbekannten Grösse nur 1 zum Coefficienten hat. Dieses ist eine Ergänzung zum 150. §. wo angenommen wird, daß sich jede quadratische Gleichung auf die Form (*C*) bringen lasse.

Die 53. Aufgabe.

§. 154. Zwey Haufen Soldaten haben eine gleiche Summe Gulden unter sich zu theilen, in dem ersten sind 4 Köpf mehr als in dem andern; bey dem Austheilen hat einer von den anderen 8 fl. mehr bekommen als einer von den ersten. Die Summe der Gulden ist 172 fl. mehr als Köpfe zusammen sind. Wie viel Leut und wie viel Gulden waren da?

Auflösung.

In dem anderen Haufen sind Köpfe gewesen x

so sind in dem ersten $x + 4$

die Summe der Gulden $2x + 176$

Einer von dem andern Haufen bekomt $\frac{2x + 176}{x}$

Einer von dem ersten $\frac{2x + 176}{x + 4}$

dahe-

daher $\frac{2x+176}{x} = \frac{2x+176+8}{x+4}$

oder $\frac{2x+176}{x} = \frac{2x+176+8x+32}{x+4}$

$x+4)$ ———————————————

$\frac{2x^2+176x+8x+704}{x} = 2x+176+8x+32$

$x)$ ———————————————

$2x^2+176x+8x+704 = 2x^2+176x+8x^2+32x$

$2x^2+176x+8x \qquad 2x^2+176x+8x$

$704 = 8x^2+24x$

$8 \quad 8$

$88 = x^2+3x$

$3x = 3x$ abgezogen

$88-3x = x^2$ oder

$x^2 = -3x+88$

wo $p = -3$; $q = +88$ und

$x = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4}+88)}$

aber $\frac{9}{4}+88 = \frac{9+88.4}{4} = \frac{9+352}{4}$

$= \frac{361}{4}$

Die Wurzel des Zählers ist 19; also $\sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{19}{2}$

und $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{19}{2} = +\frac{16}{2} = 8$ weil nur das obere Zeichen gebraucht wird.

folglich sind . . . = 192

Die

Die 54. Aufgabe.

§. 155. Aus dem gegebenen Product zweyer Zahlen und ihrer Summe die Zahlen selber zu finden.

Auflösung.

Das Product sey $= a$ Die eine gesuchte Zahl $= x$
die Summe $= b$ die andere $= y$

so ist $xy = a$ $x + y = b$

$$y)\ \overline{x = a : y} \qquad \frac{\quad y \quad y}{x = b - y}$$

$$a : y = b - y$$
$$y)\overline{\qquad\qquad}$$
$$a = by - y^2$$

Weil nun y^2 negativ ist; ein Quadrat aber niemal negativ sein kann (§. 141.): so muß y^2 addiret: by aber subtrahiret werden.

$$a = by - y^2$$
$$-by + y^2$$
$$\overline{y^2 - by + a = 0}$$
$$a \quad a$$
$$y^2 - by = -a$$
$$\tfrac{1}{4}b^2 \qquad \tfrac{1}{4}b^2$$
$$\overline{y^2 - by + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}b^2 - a}$$

Extr. R.

$$\left.\begin{matrix} y - \tfrac{1}{2}b \\ \tfrac{1}{2}b - y \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a}$$

$$y = \begin{cases} \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a} \\ \tfrac{1}{2}b - \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - a} \end{cases}$$

$a =$

$$a = by - y^2$$
$$y^2 = y^2 \text{ add.}$$
$$y^2 + a = by$$
$$a = a \text{ abgezogen}$$
$$y^2 = by - a$$

Hier ist im 151. §. $x = y$; $p = b$; $q = -a$; und
$$y = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)}$$

Man findet also zween Wehrte für y;
und weil $x = b - y$ so ist

$$x = b - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)} = \tfrac{1}{2}b \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)}$$

Setzt man nemlich $y = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)}$
so ist $x = \tfrac{1}{2}b - \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)}$
Setzt man aber $y = \tfrac{1}{2}b - \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)}$
so ist $x = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 - a)}$

Es ist klar, daß die beyden letzten Wehrte von y und x, nur die vorigen, verwechselt sind. Man hat nemlich von x in der Rechnung nichts angenommen, das sich nicht auch von y annehmen liesse; denn wenn man $xy = a$ $x + y = b$ setzt, so liesse sich eben so gut $yx = a$; $y + x = b$ setzen, oder man könnte die Zahl y nennen, die man x genennt hatte. Wenn man also zuletzt y durch lauter gegebene Grössen ausdruckt, so muß dieser Ausdruck auch zugleich x bedeuten können.

Die 1. Anmerkung.

§. 156. In der nur erwehnten Erinnerung liegt der Grund, warum die unbekannte Grösse einer Gleichung oft mehr als eiuen Wehrt hat. Man fragt nemlich oft nicht nach einer einzigen Sache, sondern nach vielen zugleich. Die Antwort muß also diese Sachen alle zugleich angeben. Hier fragte man zwar, wie es scheint, nur nach y; man sagte aber von diesem y nichts, was sich nicht auch von x sa-

gen

gen liesse, und fragte daher in der That zugleich nach x und y.

Die 2. Anmerkung.

§. 157. Es fließt hieraus die Regel, wo möglich, die Frage so einzurichten, daß man nur einerley fragt, so wird auch die Antwort einfach. Wie eben diese Aufgabe 110. §: aufgelöset ward, suchte man beyder Zahlen halbe Differenz. Diese konnte betrachtet werden, in so fern sie zur halben Summe addirt oder davon abgezogen wird, daher ist sie entweder positiv oder negativ; ihre Grösse aber beydemal einerley, nur das Zeichen unterschieden; deßwegen fand man sie durch eine reine quadratische Gleichung (§. 151. III.). Hier aber sind x und y nicht gleich, und doch findet man y aus keiner andern Betrachtung, als aus der man x finden würde, daher wird die quadratische Gleichung unrein, damit y zweene unterschiedene Wehrte bekommen kann, von dem einer x ist. Hätte man x gesucht, so hätte die Gleichnng eben so zweene Wehrte gegeben, davon eine y wäre.

Die 55. Aufgabe.

§. 158. **Zwo Zahlen zu finden, deren Summen Product und Differenz der Quadrate gleich sind.**

Auflösung.

Die grössere sey x; die kleinere y: so ist

I) $xy = x + y$, II) $x + y = x^2 - y^2$

Es ist aber $x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)$, wie man sich aus §. 47. leicht versichert; also verwandelt sich die Gleichung II in $x + y = (x + y).(x - y)$ und beyderseits mit $x + y$ dividirt, komt $1 = x - y$, also auf beyden Seiten y addirt $1 + y = x$ und diesen Wehrt von x in I gesetzt

(1+

$(1+y).\, y = 1+y+y$ oder $y+y^2 = 1+2y$
$y = y$ abgezogen

$y^2 = y+1$

Hier ist in 151, $x=y$, $p=1$, $q=1$; also
$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}+1)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$ folglich
$1+y$ oder $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$

Die 1. Anmerkung.

§. 159. Die Probe hiervon zu machen, muß man mit Irrationalgrössen zu rechnen wissen, wie sogleich soll gewiesen werden.

Die 2. Anmerkung.

§. 160. Aus §. 67. ist $\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ Weil nun $5 > 4$

so ist $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ oder > 2 und $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{2}{2}$ oder > 1

daher ist $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$ verneint.

Es ist aber auch $\sqrt{5} < 3$ weil $\sqrt{9} = 3$; folglich

$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ bejaht.

Wenn man also in den Wehrten von y und x die untern Zeichen braucht, so ist der erste verneint, der andere bejaht: Es bleibt dem ohngeachtet wahr, daß y die kleinere Grösse ist; denn man sieht jede verneinte Grösse für kleiner an, als jede (§. 151. IV.) bejahte.

Wenn solchergestalt $y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ verneint,

x=

$x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ bejaht ist, so geben sie ein verneintes Product xy (§. 41.), folglich muß auch ihre Summe x+y, die dem Producte gleich seyn soll, verneint seyn, oder zum bejahten x das verneinte y addiren, muß so viel seyn als von dem bejahten x was positives grösseres abziehen. (§. 31.).

Die 56. Aufgabe.

§. 161. Eine Zahl, die mit einer Irrationalzahl multiplicirer ist, mit unter das Wurzelzeichen zu bringen.

Auflösung.

Es sey a bey $a\sqrt[n]{b}$ unter das Wurzelzeichen zu bringen. Man setze einstweilen

$$a\sqrt[n]{b} = v$$

zur Dignität n erhoben

$$a^n b = v^n$$

Rad. n extr.)

$$\sqrt[n]{a^n b} = v$$

Hieraus folgt diese Regel: Erhebet die Zahl vor dem Wurzelzeichen zu der Dignität, dergleichen das Wurzelzeichen hat, und multiplicirt diese Dignität mit der Zahl unter dem Wurzelzeichen, so ist geschehen, was man verlangt.

Anmerkung.

§. 162. Diese Regel mit Exempeln zu erläutern, mögen

gen folgende seyn: $3\sqrt{2}=\sqrt{18}$, $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$, $\frac{1}{2}\sqrt{7}=\sqrt{\frac{7}{4}}$, $2\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{48}$, $x\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{abx^3}$, $\frac{1}{n}\sqrt{ab}=\sqrt{ab:n^2}$, $(a-c):(d+f)\sqrt{g}=\sqrt{(a-c)^2g:(d+f)^2}=\sqrt{(a^2g-2acg+c^2g):(d^2+2df+f^2)}$ u. s. w.

Der 1. Zusatz.

§. 163. Hieraus ist klar, daß, so man die Zahl unter dem Wurzelzeichen mit einer Dignität, dergleichen die Wurzel ist, dividiret, die Wurzel davon vor das Wurzelzeichen gesetzt werden könne, als: $\sqrt{8}=\sqrt{4.2}=2\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{27.4}=3\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{5.\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\sqrt[n]{x^nb}=x\sqrt[n]{b}$, $\sqrt{4\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{\frac{1}{2}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{2}}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$, $2\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{2}{2}\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

Der 2. Zusatz.

§. 164. Wenn nach geschehener dergleichen Reduction einerley Zahlen unter dem Wurzelzeichen bleiben, können die Irrationalzahlen, wie andere Zahlen, addirt, und subtrahirt werden, als: $\sqrt{8}$ und $\sqrt{32}$ geben $2\sqrt{2}$ und $4\sqrt{2}$, daher $4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, $4\sqrt{}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{320}$ und $\sqrt[3]{135}$ gibt $4\sqrt[3]{5}$ und $3\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{135}=7\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{320}-\sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{5}$.

Der 3. Zusatz.

§. 165. Eben so kann die Verhältnis zweyer Irrational-

tionalzahlen angegeben werden, wenn hinter dem Wurzelzeichen einerley Zahl übrig bleibt, als: $\sqrt{63} : \sqrt{252} = \sqrt{9.7} : \sqrt{36.7} = 3\sqrt{7} : 6\sqrt{7} = 3:6 = 1:2$.

Die 57. Aufgabe.

§. 166. Irrationalzahlen von einerley Dignität mit einander zu multipliciren.

Auflösung.

Diese Irrationalzahlen seyen $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{b}$, man setze ihr Product $= v$

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = v$$

Elev. ad dign.) ————————

$$ab = v^n$$

Extr. R.) ————

$$\sqrt[n]{ab} = v$$

Dieses zeiget, daß die Zahlen nur mit einander multipliciret werden dörfen, und das Wurzelzeichen davor gesetzt, als: $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, $\sqrt{3}.\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}.\ \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{10}\sqrt{15}$. $\sqrt[3]{7}.\ \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{14}$, $\sqrt[n]{x^v}.\ \sqrt[n]{y^s} = \sqrt[n]{x^v y^s}$ ꝛc.

Der 1. Zusatz.

§. 167. Solten Irrationalzahlen von verschiedener Dignität multipliciret werden, müßten sie vorher zu einerley Benennung oder Dignität gebracht werden, nach §. 67.

Ber 2. Zusatz.

§. 168. Weil die Division der Ruckweg von der Mul-

Multiplication, so können auch Irrationalzahlen nur vor sich dividiret, und das Wurzelzeichen davor gesetzt werden, als: $\sqrt{12} : \sqrt{6} = \sqrt{2}$.

§. 169. Nun läßt sich die Probe von den Zahlen §. 158. 160. machen.

$$x = \tfrac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Summe $= 2 + \sqrt{5}$

Ferner $\tfrac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\tfrac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

multipl.

$+ \tfrac{3}{4}\sqrt{5} + \tfrac{5}{4}$

$\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}$

Product $2 + \sqrt{5}$

$$x^2 = \tfrac{9}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4} \text{ (§. 147.)}.$$

$$y^2 = \tfrac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{5}{4}$$

$$x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$$

Nimmt man aber die zweyte Wehrte

$$x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

So ist

Summe $= 2 - \sqrt{5}$

Ferner $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$- \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{5}{4}$

$\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$

Product $2 - \sqrt{5}$

Endlich

$$x^2 = \frac{9}{4} - \frac{3\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}$$

$$y^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4}$$

$$x^2 - y^2 = 2 - \sqrt{5}.$$

Die 58. Aufgabe.

§. 170. Man sucht drey Zahlen, die eine zusammenhängende Proportion (*prop. geom. continua*) ausmachen, so, daß von ihnen die Summe der Zah-

len selbst $= a$; und die Summe ihrer Quadrate $= b$; gegeben sind.

Auflösung.

Wenn die erste der drey gesuchten Zahlen x; die zweyte y heißt: so ist die dritte $\frac{y^2}{x}$ und man hätte folgende Gleichungen:

$$\text{I)}\ x + y + \frac{y^2}{x} = a; \quad \text{II)}\ x^2 + y^2 + \frac{y^4}{x^2} = b$$

Hätte man aber die letzte der drey gesuchten Zahlen z, die mittelste wieder y genannt: so wäre die erste, die jetzo x heißt, $\frac{y^2}{z}$ geworden, und man hätte für y und z eben die Gleichungen, wie für x und y erhalten.

Nach der Erinnerung bey 157 wird man also versuchen, ob es angeht, statt x und z, die man zugleich finden müßte, etwas zu suchen, das nicht doppelt ist. So was wird wohl die Summe der beyden äussersten Zahlen seyn. Man nenne sie also u und setze III) $x + \frac{y^2}{x} = u$, wo man nun x aus der Rechnung wegzuschaffen, und u zu gebrauchen sucht.

Wenn man in III jedes Glied mit x multipliciret, so erhält man IV) $x^2 + y^2 = ux$; und aus I und

III wird V) $u+y=a$; aus IV aber auf beyden Seiten y^2 abgezogen, $x^2=ux-y^2$; dieses mit 151. §. verglichen, giebt $p=u$; $q=-y^2$ also

VI $x=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{(\frac{1}{4}u^2-y^2)}$ wo in die Augen fällt, daß es für einerley mittlere Zahl y zwey x giebt, nemlich die dazu gehörigen beyden äussern Zahlen.

Weil nun $y=a-u$ aus V; so ist (§. 147.)
$y^2=a^2-2au+u^2$, und $\frac{1}{4}u^2-y^2$
$=\frac{1}{4}u^2-a^2+2au-u^2$ (§ 45.).
$=2au-\frac{3}{4}u^2-a^2$, daher wird aus VI der Wehrt von $x=\frac{1}{2}u\pm\sqrt{(2au-\frac{3}{4}u^2-a^2)}$ statt dessen ich der Kürze wegen $x=\frac{1}{2}u+p$ schreiben will, wo p die Irrationalgrösse bedeutet, daß $p^2=2au-\frac{3}{4}u^2-a^2$, welches einerley bleibt, man mag p mit + oder mit — zu $\frac{1}{2}u$ gesetzt haben (§. 41.).

Folglich ist $ux=\frac{1}{2}u^2\pm up$, welches, vermöge IV, der Wehrt von x^2+y^2 ist.

Aus III ist $\frac{y^2}{x}=u-x$, folglich den nur gefundenen Wehrt von x gebraucht,

$=u-(\frac{1}{2}u\pm p)=u-\frac{1}{2}u\mp p=\frac{1}{2}u\mp p$; das Quadrat hiervon ist $\frac{y^4}{x^2}$.

Dieses Quadrat also, und der Wehrt von x^2+y^2 geben zusammen b, vermöge (II) also ist

$\frac{1}{2}u^2\pm up+(\frac{1}{2}u\mp p)^2=b$, oder das Quadrat wirklich gemacht.

$\frac{1}{2}u^2$

$\frac{1}{2}u^2 \pm up + \frac{1}{4}u^2 \mp up + p^2 = b$; hier zusammen gerechnet, was einerley ist, und weggelassen, was sich aufhebt, kömt

$\frac{3}{4}u^2 + p^2 = b$; weil aber in p noch u enthalten ist, setze man statt p^2 seinen Wehrt, so kömt

$$\frac{3}{4}u^2 + 2au - \frac{3}{4}u^2 - a^2 = b \text{ oder}$$

$$2au - a^2 = b$$

$$a^2 = a^2 \text{ add.}$$

$$2au = b + a^2$$

mit $2a$ dividirt

$$\text{VII)}\; u = \frac{b + a^2}{2a} = \frac{b}{2a} + \frac{a}{2} \;(\S.\,59.).$$

also aus (V) $a - u$ oder $y = a - \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}a$ (VIII)

$$= \frac{1}{2}a - \frac{b}{2a}$$

$$= \frac{a^2 - b}{2a}$$

folglich $\frac{1}{2}u = \frac{b}{4a} + \frac{a}{4}$

davon das Quadrat oder

$$\frac{1}{4}u^2 = \frac{b^2}{16a^2} + \frac{b}{8} + \frac{1}{16}a^2$$

Ferner $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4a^2}$. Man soll dieses in dem Wehrte von x (VI) von $\frac{1}{4}u^2$ abziehen, man drücke also die Theile von y^2 so aus, daß sie mit den Theilen von $\frac{1}{4}u^2$, wo eben die Potenzen von a und b vorkommen, einerley Nenner haben: so wird

$$y^2 = \frac{4}{16}a^2 - \frac{4b}{8} + \frac{4b^2}{16a^2}$$

$$\text{aber } \frac{1}{4}u^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{b}{8} + \frac{b^2}{16a^2}$$

$$\frac{1}{4}u^2 - y^2 = -\frac{3a^2}{16} + \frac{5b}{8} - \frac{3b^2}{16a^2} \quad (\text{§. } 45.)$$

Diese Grösse, die nun gegeben ist, heisse man c^2, also die Wurzel daraus c: so ist aus VI)

$$\text{IX)} \quad x = \frac{b}{4a} + \frac{a}{4} \pm c$$

wo der eine Wehrt die erste der drey gesuchten Zahlen der andere die letzte giebt.

Weil die drey Zahlen nemlich nach einander wachsen oder abnehmen müssen, so giebt in IX das obere Zeichen die erste Zahl, wenn sie abnehmen; das untere aber giebt die erste Zahl, wenn sie wachsen, da man die Progression, von welchem Ende man will, anfangen kann, so kan jede der beyden äussersten Zahlen die erste heissen.

In

In den beyden Wehrten VIII, IX ist also die Auflösung der Gleichung enthalten.

Exempel:

§. 171. Die drey Zahlen sollen zusammen $a=21$ und ihre Quadrate zusammen $b=189$ ausmachen. Weil in den Wehrten der gesuchten Grössen $\frac{b}{a}$ häufig vorkömt, so berechnet man dieses zuerst und findet es $=\frac{189}{21}=9$; daher $\frac{b}{2a}=\frac{9}{2}$ und $\frac{b}{4a}=\frac{9}{4}$;

Nun muß man zuerst c^2 berechnen, es ist also

$$-\frac{3a^2}{16}=-\frac{3.441}{16}=\frac{-1323}{16}$$

$$-\frac{3b^2}{16a^2}=-\frac{-3.81}{16}=\frac{-243}{16}$$

Dieses zusammen $=\frac{-1566}{16}$

$$+\frac{5.b}{8}=+\frac{5.189}{8}=+\frac{1890}{16}$$

$$c^2=\frac{324}{16}$$

$$\text{daher } \sqrt{\frac{324}{16}} \text{ oder } c = \frac{\sqrt{324}}{4} = \frac{18}{4}$$

Folglich aus VIII;

$$y = \tfrac{21}{2} - \frac{9}{2} = \tfrac{12}{2} = 6$$

$$x = \tfrac{9}{4} + \tfrac{21}{4} \pm \tfrac{18}{4} = \frac{30 \pm 18}{4}$$

das obere Zeichen giebt $\tfrac{48}{4} = 12$

das untere $\tfrac{12}{4} = 3$

Die drey Zahlen sind also

$3, 6, 12$, wo $3 + 6 + 12 = 21$; und $9 + 36 + 144 = 189$

Wenn man *a*, *b* nach Gefallen annähme, würde man für *c* oft einen irrationalen Wehrt finden, wodurch die äussersten Zahlen irrational würden. Durch Versuche *a*, *b* so anzunehmen, daß *c* rational wird, dürfte schwer fallen, und Regeln, nach denen man dieses erhalten könnte, lassen sich aus den hier vorgetragenen Lehre nicht herleiten. Die Aufgabe wird also hier nicht wohl anders können gebraucht werden, als daß man die drey Zahlen Anfangs annimmt, aus ihnen *a* und *b* berechnet und daraus rückwärts die Zahlen sucht.

Anmerkung.

§. 172. Man kann auf eine ähnliche Art vier Zahlen suchen, die eine zusammenhängende Proportion ausmachen, und wo die Summen der Zahlen selbst und der Quadrate

drate gegeben sind. Dieß ist in Newtons Arithmetica universali die funfzehende arithmetische Aufgabe.

Die 59. Aufgabe.

§. 173. Den Unterschied zweyer Quadraten zu finden, deren Wurzeln um eins unterschieden sind.

Auflösung.

Die eine Wurzel sey $= n$
so ist die andere $= n + 1$
das Quadrat der andern $= n^2 + 2n + 1$ (147.).
der ersten $= n^2$

der Unterscheid $= 2n + 1$ oder n und $n + 1$

also ist der Unterscheid zweyer Quadraten, deren Wurzeln um 1 unterschieden, der Summe der Wurzeln gleich.

Der 1. Zusatz.

§. 174. Hat man also von einer Zahl das Quadrat, und will das Quadrat von einer Zahl, die um 1 grösser ist, haben, so addire man zu dem Quadrat nur beyde Wurzeln, so hat man das Verlangte.

Der 2. Zusatz.

§. 175. Ist $n = 1$, so ist $2n + 1 = 3$, ist $n = 2$, so ist $2n + 1 = 5$, ist $n = 3$, so ist $2n + 1 = 7$, ist $n = 4$, so ist $2n + 1 = 9$ rc. woraus offenbar, wenn man die Quadrate von 1 an haben will, man nur die in natürlicher Ordnung auf einander folgende ungraden Zahlen zu einander addiren dörfe.

Die 60. Aufgabe.

§. 176. Die Eigenschaften der Cubiczahl zu finden, wenn die Wurzel zwey Theile hat.

Auflösung.

Die zwey Theile seyen $= a + b$, so ist ihr Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$. (§. 147.).

$$\begin{array}{r} a + b \\ \hline a^2 b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2 b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Hieraus ist klar: wenn die Wurzel zwey Theile hat, so hat die Cubiczahl vier Theile; 1) die Cubiczahl des ersten Theils, 2) das dreyfache Product des Quadrats des ersten Theils in den anderen, 3) das dreyfache Product aus dem ersten Theil in das Quadrat des anderen, und 4) aus der Cubiczahl des zweyten Theils. Oder kurz aus den Cubiczahlen eines jeden Theils und aus dem dreyfachen Product eines jeden Theils in das Quadrat des andern.

Der 1. Zusatz.

§. 177. Hätte die Wurzel drey Theile, als $a + c + d$, so würde an statt b stehen $c + d$, dahero müßte die Cubiczahl von $a + c + d$ bestehen 1) aus der Cubiczahl von $a = a^3$, 2) aus dem dreyfachen Product von a^2 in $c + d = 3a^2 c + 3a^2 d$, 3) aus dem dreyfachen Product von dem Quadrat $c + d = c^2 + 2cd + d^2$ in $a = 3ac^2 + 6acd + 3ad^2$, 4) aus der Cubizahl von $c + d = c^3 + 3c^2 d + 3cd^2 + d^3$. Woraus erhellet, daß die Cubiczahl einer dreytheiligen Wnrzel bestehe aus

aus den Cubiczahlen jeden Theils, dreyfachen Products eines jeden Theils in das Quadrat eines jeden andern Theils, und über das aus dem sechsfachen Product aller drey Theile.

Der 2. Zusatz.

§. 178. Auf eine gleiche Art findet man, daß, wenn die Wurzel vier- und mehrtheilig ist, die Cubiczahl bestehe 1) aus den Cubiczahlen eines jeden Theils, 2) aus dem dreyfachen Product eines jeden Theils in das Quadrat jeden andern Theils, 3) aus dem sechsfachen Product eines jeden Theils in jede zwey von den übrigen.

Die 61. Aufgabe.

§. 179. Den Unterschied zweyer Cubiczahlen zu finden, deren Wurzeln um eines unterschieden sind.

Auflösung.

Die Wurzeln seyen n und $n + 1$
so ist die grössere Cubiczahl $= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
(§. 176.) die kleinere $= n^3$

Unterschied $= 3n^2 + 3n + 1$
das ist, $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ und $2n^2 + n$
Es bestehet demnach der Unterschied 1) in der Quadratzahl von der grössern Wurzel, 2) doppelten Quadratzahl der kleineren, 3) der kleinen selbst.

Zusatz.

§. 180. Wenn man also die Quadratzahlen schon gemacht hat (§. 175.), so kann man auch durch blosses addiren die Cubiczahlen finden, wenn zu jeder vorhergehenden

gehenden das, was §. 179. gemeldet worden, addirt wird. Man kann aber auch, ohne die Quadrate zu haben, die Cubiczahlen blos durch addiren finden. Die Methode steht unter andern in Kästners Analysis endlicher Grössen, 48. §. Ludolfs Tetragonometria tabularia, Jena, 1712. 4to. enthält die Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 100000; Buchners Tabula Radicum, quadratorum & cuborum, Nürnb. 1705. in lang 8vo, die Quadrate und Cubiczahlen aller ganzen Zahlen von 1 bis 12000; die Buchnerischen Tafeln aber sind voller Fehler, ohne deren Verbesserung man sie nicht sicher brauchen kann.

Die 62. Aufgabe.

§. 181. **Eine Regel zu finden, nach welcher eine jede zweytheilige Wurzel leicht zu einer jeden Dignität erhaben werden kann.**

Auflösung.

Man erhebe durch gewöhnliches Multipliciren die Wurzel $a+b$ zu etlichen Dignitäten, so wird sich die Regel selbsten geben, wenn man betrachtet, woraus die Theile der Dignität bestehen.

$a+b$

$a^2+2ab+b^2$

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Man ersiehet hieraus, 1) die Glieder bestehen aus Producten von a und b oder ihren Dignitäten. 2) Diese Producten haben Zahlen bey sich, die man Unzen nennet.

net. 3) Daß die Dignität des ersten Theils *a* in jedem Glied um 1 weniger; hingegen aber die von *b* immer um eines mehr sey. Dahero diese Producte leicht zu finden, wenn folgende zwey Reihen unter einanger geschrieben, und jedes untere Glied in das überstehende multipliciret wird, z. E. für die fünfte Dignität.

$$\begin{array}{cccccc} a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^4 \\ \hline a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3 & ab^4 & b^5 \end{array}$$

4) Die Unzen entstehen aus zwey arithmetischen Progressionen der natürlichen Zahlen, nemlich eine abnehmende und zunehmende, die so viel Glieder hat, als der Exponent der Dignität Einheiten. Z. E. für die fünfte Dignität.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Die aber durch die Division gefunden werden, nemlich für das zweyte Glied $\frac{5}{1} = 5$ für das dritte $\frac{5.4}{1.2} = \frac{20}{2} = 10$ für das vierte $\frac{5.4.3}{1.2.3} = \frac{60}{6} = 10$ für das fünfte $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = \frac{120}{24} = 5$ für das letzte $\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = \frac{120}{120} = 1$, werden dann diese gefundene Unzen zu vorhin gefundenen Producten gesetzt: so hat man die verlangte Dignität.

$$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Und also findet man alle übrige Dignitäten.

An-

§. 182. Wir enthalten uns, die allgemeine Regel des unvergleichlichen Neutons hieraus herzuleiten, aus Beysorge, es mögte denen Anfängern zu beschwerlich und verdrüßlich seyn, zumalen der Nutze davon nicht sogleich gezeiget werden kann. Wir versparen dahero gedachte allgemeine Regel dahin, wo wir sie nöthig haben werden.

Die 63. Aufgabe.

§. 183. Die Eigenschaften der arithmetischen Progression zu untersuchen.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$, die Differenz $= d$, so sind die Glieder

1) in der wachsenden Progression

I	II	III	IV	V	VI
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$

2) in der abnehmenden

I	II	III	IV	V	VI
a	$a-d$	$a-2d$	$a-3d$	$a-4d$	$a-5d$

Diese Buchstaben zeigen deutlich, daß die Differenz in jedem Glied um einmal weniger sey, als die Zahl, welche anzeiget, das wie vielteste Glied es sey, als im fünften ist $4d$ u. s. w. doch mit dem Unterschied, daß diese Differenz in der wachsenden Progression zum ersten Glied addirt, in der abnehmenden aber subtrahirt werden müsse.

Der 1. Zusatz.

§. 148. Wenn demnach die Zahl der Glieder gegeben ist nebst der Differenz, so findet man das letzte Glied, wenn man von der Zahl der Glieder 1 abziehet, die Differenz mit diesem Rest multipliciret, und zu dem

ersten

ersten Glied addiret, wenn die Progression wachsend, subtrahiret aber, wenn sie abnehmend ist. Es sey das erste Glied $=a$, die Differenz $=d$, die Zahl der Glieder $=n$, das letzte Glied $=y$, so ist $(n-1)d)+a=y$ bey der abnehmenden Progression aber $a-(n-1)d=y$, oder bey der wachsenden $a+nd-d=y$, bey der abnehmenden $a-nd+d=y$.

Der 2. Zusatz.

§. 185. In der Aequation $a+nd-d=y$ sind vier Grössen, deren jede unbekannt seyn kann, und die übrigen bekannt; daher noch 3 Aufgaben daraus gemacht werden können, als:

$$a=y-nd+d$$

$$n=\frac{y-a}{d}+1$$

$$d=\frac{y-a}{n-1}$$

Die 64. Aufgabe.

§. 186. Die Summe des ersten und letzten Gliedes in einer arithmetischen Progression zu finden.

Auflösung.

Es sey alles, wie §. 183, so ist

a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$
			$a+2d$	$a+d$	a
			$2a+5d$	$2a+5d$	$2a+5d$
a	$a-d$	$a-2d$	$a-3d$	$a-4d$	$a-5d$
			$a-2d$	$a-d$	a
			$2a-5d$	$2a-5d$	$2a-5d$

Es ist also die Summe des ersten und letzten Gliedes in einer arithmetischen Progreßion gleich der Summe jeder zwey Glieder, die von den beyden äussersten gleich weit abstehen.

Der 1. Zusatz.

§. 187. Wenn demnach die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Zahl der Glieder multiplicirt wird, so hat man die Summe aller Glieder, diese Summe sey $= x$, so ist (§. 184.) $(a+a+(n-1)d)\frac{n}{2}=x=an+\frac{n^2d}{2}-\frac{nd}{2}=x$. Wie diese Aequation müsse mit Worten ausgedruckt und eine Regel daraus gemacht werden, werden diejenige leicht fassen, die das bisher gesagte verstanden.

Der 2. Zusatz.

§. 188. Es sind in dieser Aequation wiederum vier Grössen, deren jede, wenn die übrigen drey bekannt sind, gefunden werden kann.

$$a=\frac{x}{n}-\frac{nd}{2}+\frac{d}{2}$$

$$d=\frac{2x-2an}{n^2-n}=\frac{2(x-an)}{n(n-1)}$$

$$n=\sqrt{\frac{2x}{d}+\frac{a^2}{d^2}-\frac{a}{d}+\frac{1}{4}}-\frac{a}{d}+\frac{1}{2}\ (\text{§. 151.}).$$

$$n=\sqrt{\frac{2x}{d}+\left(\frac{a}{d}-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{a}{d}+\frac{1}{2}$$

Der

Der 3. Zusatz.

§. 189. Nennet man das letzte Glied b, wenn es bekannt ist, so ist $x = (a + b) \frac{n}{2}$ daheeo

$$a = \frac{2x}{n} - b$$

$$b = \frac{2x}{n} - a$$

$$n = \frac{2x}{a + b}$$

Die 65. Aufgabe.

§. 190. Die Eigenschaften einer geometrischen Progression zu untersuchen.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$, der Exponent $= m$, so ist

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
a	am	am^2	am^3	am^4	am^5	am^6	am^7

I	II	III	IV	V	VI
a	$\frac{a}{m}$	$\frac{a}{m^2}$	$\frac{a}{m^3}$	$\frac{a}{m^4}$	$\frac{a}{m^5}$

woraus klar, daß in jedem Glied die Dignität des Exponenten mit dem ersten Glied bey der wachsenden Progression multiplicirt, bey der abnehmenden aber dividirt sey, deren Exponent 1 weniger als die Zahl des Gliedes.

Zusatz.

§. 191. Wäre demnach die Zahl der Glieder $= n$, so wäre das letzte Glied am^{n-1} oder $\frac{a}{m^{n-1}}$

Die 66. Aufgabe.

§. 192. Das Product zu finden aus der Summe einer geometrischen Progression in den um 1 verringerten Exponenten.

Auflösung.

Es sey alles, wie §. 190, so ist

$$\begin{array}{l} a + am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 \\ \qquad\qquad\qquad m - 1 \\ \hline -a - am - am^2 - am^3 - am^4 - am^5 \\ + am + am^2 + am^3 + am^4 + am^5 + am^6 \\ \hline \qquad am^6 - a \end{array}$$

Das Product aus der Summe einer geometrischen Progression in den um 1 verringerten Exponenten ist gleich der Differenz des ersten Glieds und eines Glieds weiter als das letzte.

Zusatz.

§. 193. Wenn also die Differenz des ersten und eines über das letzte weiteren Gliedes mit dem um 1 verringerten Exponenten dividirt wird, so bekomt man die Summe der geometrischen Progression, man nenne die Summe x, so ist $\frac{am^n - a}{m - 1} = x$

Die 67. Aufgabe.

§. 194. Die Wahrheit von §. 193. durch die Division zu finden, oder zu finden, was heraus komme, wenn die Differenz des ersten und lezten Gliedes mit dem um 1 verringerten Exponenten dividirt wird.

Auflösung.

Es sey alles, wie vorhin, so ist (§. 59.).

$$m-1)\; am^{n-1} - a\; (am^{n-2} + am^{n-3} + am^{n-4}$$
$$\qquad am^{n-1} - am^{n-2} \qquad\qquad (am^{n-5}$$
$$\overline{\qquad + am^{n-2} - a \qquad}$$
$$+ am^{n-2} - am^{n-3}$$
$$\overline{\qquad + am^{n-3} - a \qquad}$$
$$+ am^{n-3} - am^{n-4}$$
$$\overline{\qquad + am^{n-4} - a \qquad}$$
$$+ am^{n-4} - am^{n-5}$$
$$\overline{\qquad + am^{n-5} - a \text{ 2c.} \qquad}$$

Wäre $n = 5$ gewesen, so würde $am^{n-5} = am^0 = a$ (§. 60.) folglich da $am^{n-4} - am^{n-5} = am^{n-4} - a$ von $am^{n-4} - a$ abgezogen wurde, mußte es aufgehen, und so in jedem Fall, wenn eine so grosse Zahl von der Dignität des Exponenten abgezogen werden solle (§. 59.) als die Zahl der Glieder ist. Man siehet also hieraus, daß durch diese Division alle Glieder heraus kommen, ausser das letzte, und würde man die Differenz von dem ersten und einem weiteren als das letzte Glied genommen haben, so hätte man alle Glieder, das ist, die Summe der ganzen Progression bekommen.

Anmerkung.

§. 195. Es sind zwar die 66- und 67ste Aufgaben nur auf die wachsendeu Progressionen angewendet worden; wer aber auch bey der abnehmenden eben dieses vornehmen will, wird eben diese Eigenschaften finden. Allein da in diesem Fall der Exponent ein Bruch, und wenn man das erste als grössere Glied von dem letzten als kleineren abziehet, gibt es eben so wohl eine negative Grösse, als wenn man 1 von dem Exponenten, der ein Bruch ist, abziehet, wodurch die Rechnung etwas beschwerlich wird; dahero ist es am besten, man sehe bey der abnehmenden Progression das letzte Glied als das erste an, wodurch allen Schwierigkeiten vorgebogen wird. Man drücke nemlich die Summe im 193. §. so aus:

$$\frac{a - am^n}{1 - m} = x.$$ Auf diese Art ist der Dividendus hier bejaht, wenn der Dividendus im 193 verneint, oder wenn das dortige letzte Glied grösser als das erste ist. Eben so wird hier der Divisor bejaht, wenn der dortige verneint, oder wenn der Exponent m kleiner als 1 ist. Weil aber zwo bejahte Grössen eben den Quotienten geben, wie die ihnen entgegen gesetzten beyden verneinten (§. 42.), so kömt einerley x heraus, man mag es auf die jetzige Art, oder wie im 193. §. ausdrücken.

Man kann eben dieses auch so ausdrücken:

$$\frac{a.(1 - m^n)}{1 - m} = x;$$ denn wenn zwey Producte, wie $a. 1$ und $- a. m^n$ einen gemeinschaftlichen Factor a haben, so

kann

kann man diesen in das multipliciren, was die beyden übrigen unterschiedenen Factorn zusammen geben.

Die 68. Aufgabe.

§. 196. Eine Reihe von Brüchen zu summiren, die sich mit $\frac{1}{2}$ anfängt, und da der folgende Bruch immer des nächstvorhergehenden Hälfte ist, daß also die Reihe so aussieht: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, u. s. w.

Auflösung.

Man setze im 195. §. in dem zweyten Ausdrucke der Summe $a = \frac{1}{2}$; $m = \frac{1}{2}$; und verlange die Summe von n Gliedern der Reihe: so ist solche

$$\frac{\frac{1}{2}.(1 - (\frac{1}{2})^n)}{\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ (§. 67.)}$$

oder n Glieder der Progreßion, geben eine Summe, der zur 1 das $n$te Glied fehlt. Die Progreßion sey $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$. Hier sind 8 Glieder, das achte ist $\frac{1}{2^8}$. Addirt man diese Glieder nach der gewöhnlichen Bruchrechnung, so daß man sie alle auf 256 Theile bringt, so muß man jedes Bruches Zähler mit der Zahl multipliciren, mit der sein Nenner muß multipliciret werden, um sich in 256 zu verwandeln. Also beträgt dergleichen 256 Theile

$\frac{1}{256}$	1
$\frac{1}{128}$	2
$\frac{1}{64}$	4
$\frac{1}{32}$	8
$\frac{1}{16}$	16
$\frac{1}{8}$	32
$\frac{1}{4}$	64
$\frac{1}{2}$	128
	255

oder die Brüche zusammen machen $\frac{255}{256} = 1 - \frac{1}{256}$

Je grösser nun n wird, desto kleiner wird $\frac{1}{2^n}$, und man kann allemal n so gros nehmen, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner wird, als jeder kleiner Bruch, so gering man auch solchen nähme. Wolte man z. E. haben, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner als ein Milliontheil werden solte, so müßte man n so gros nehmen, daß 2^n grösser als eine Million würde, und dieses geht an, weil die Potenzen der 2 immer fort ohne Gränzen wachsen.

Da also $\frac{1}{2^n}$ so klein, als man nur will, werden kann, so kann sich die wirkliche Summe dieser Reihe, nemlich $1 - \frac{1}{2^n}$, der Einheit, so weit man will, nähern, das ist, man kann die Reihe allemal so weit fortsetzen, daß ihre Summe zwar nicht völlig 1 ist, aber doch der 1 so nahe kömt, als man nur will.

In dieser Bedeutung sagt man: die Summe der unendlich fortgesetzten Reihe sey $= 1$, oder, wenn man sich alle mögliche Glieder dieser Reihe vorstellt, so betragen sie zusammen 1. Denn wer sagte, diese Summe sey 1 weniger etwas, der würde dieses Etwas nicht angeben können, weil sich die Reihe allemal so weit fortsetzen läßt, daß $\frac{1}{2^n}$ kleiner als dieses Etwas wird. Sagte jemand, die Summe dieser ohne Ende fortgesetzten Rei-

he

he sey von der 1 immer noch um etwas unterschieden, das wenigstens ein Milliontheilgen betrage, so müßte er uns verwehren, die Reihe so weit fortzusetzen, bis $\frac{1}{2}^n$ kleiner als ein Milliontheilgen würde. Da er aber dieses nicht verwehren kann, so muß er auch zugestehen, daß die Summe der Reihe der 1 näher komme, als er behaupten wolte. Und so mag jemand einen so geringen Unterschied zwischen 1 und die Summe der Reihe annehmen als er will, so kann man ihm zeigen, daß dieser Unterschied noch vermindert werden kann, wenn nur die Reihe weit genug fortgesetzt wird.

Wenn man also die Reihe, so weit als nur möglich ist, fortsetzen darf, so läßt sich für ihre Summe nichts anders angeben als 1; und so wird deutlich seyn, daß die Summe dieser unendlichen Reihe Brüche 1 heissen muß.

Der wirklichen Summe, von den Gliedern nemlich, die man in der That nach einander hinsetzen kann, fehlt allemal zur 1 das letzte dieser Glieder. Aber dieses kann so klein, als man nur will, werden, welches man auch so ausdrückt: es könne verschwinden. Man trägt also die bisherigen Schlüsse abgekürzt auch so vor: das letzte Glied wird in Vergleichung mit der 1 als nichts angesehen, und daher ist die Summe = 1.

Wäre die Meynung dieses Ausdruckes: das letzte Glied der unendlichen Reihe sey in der That = 0; so würde man ihn schwerlich rechtfertigen können. Denn erstlich gibt es kein letztes Glied dieser unendlichen Reihe, man kann niemals aufhören zu halbiren, jeder Bruch, so klein er auch ist, hat wieder eine Hälfte; zweytens kann kein Glied dieser Reihe, so weit man sie auch fortsetzt, = 0 werden. Denn käme man durch halbiren auf 0, so wäre Nichts die Hälfte von Etwas, oder das nächste

ste Glied vor dem Nichts wäre 2mal Nichts, und das zweyte davon rückwärts viermal Nichts, und so wären alle vorhergehende Glieder nur achtfache, sechszehenfache, ꝛc. des Nichts.

Solche Ungereimtheiten zu vermeiden, muß man sich die Sache auf die angezeigte Art deutlich vorstellen, und wenn man von einem letzten Gliede, das als nichts angesehen wird, redet, solche Ausdrückungen nur als Abkürzungen der vorigen Schlüsse ansehen. Diese Erinnerung ist deswegen wichtig, weil gegenwärtige Aufgabe schon als etwas, das zur Rechnung des unendlichen gehöret, kann betrachtet werden, und gehörige Begriffe von ihr bey dieser Rechnung Dienste leisten können.

Die 69. Aufgabe.

§. 197. **Eine unendliche geometrische Reihe zu summiren, wo der Exponent ein Bruch ist.**

Auflösung.

Das erste Glied sey $\frac{a}{b}$, wo a und b ganze Zahlen bedeuten, und das Glied also eine ganze Zahl ist, wenn $b = 1$; Eben so sollen c, d ganze Zahlen bedeuten, und der Exponent $\frac{c}{d}$ seyn. So ist die Progression

$\frac{a}{b} + \frac{a}{b}.\frac{c}{d} + \frac{a}{b}.\frac{c^2}{d^2} + \frac{a}{b}.\frac{c^3}{d^3}$.. u. s. w. Jedes Glied enthält nemlich $\frac{a}{b}$ in einer Potenz von $\frac{c}{d}$ multipli-

tiplicirt, deren Exponent um 1 weniger ist, als die Zahl des Gliedes; das $n+1$te Glied also ist $\frac{a}{b}.\frac{c^n}{d^n}$ z. E. das 101 Glied wäre $\frac{a}{b}.\frac{c^{100}}{d^{100}}$. Eben so ist das $n$te Glied $\frac{a}{b}.\frac{c^{n-1}}{d^{n-1}}$. Wenn man nun die Summe von n Gliedern finden wolte, so würde man nach dem 139. §. folgendergestalt verfahren: Das $n$te Glied wäre, was im 193. §. das letzte heißt, und das $n+2$te ist, was dorten eins weiter als das letzte heißt. Also hiesse

Das erste Glied im 193. §. a, hier $\frac{a}{b}$

Der Exponent im 193. §. m, hier $\frac{c}{d}$

n wäre dorten und hier einerley.

Wenn man nun die dort gefundene Summe nach dem Ausdrucke braucht, der beym 195. §. zuletzt gegeben worden, so wird sie in den gegenwärtigen Buchstaben

$$\frac{\frac{a}{b}.\left(1-\left(\frac{c}{d}\right)^n\right)}{1-\frac{c}{d}}$$

Die-

Dieses gibt die Summe für n Glieder.

Z. E. sey $a=1$, $b=10$, $c=1$, $d=10$, $n=5$, oder man suche die Summe folgender fünf Brüche $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000}$: so findet sie sich

$$\frac{\frac{1}{10}.(1 - \frac{1}{100000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}.\frac{99999}{100000}}{\frac{9}{10}} = \frac{99999}{9.100000}$$

$$= \frac{11111}{100000}.$$

Wenn man nun die Reihe, so weit man will, ohne Ende fortsetzen kann, so wird $(\frac{c}{d})^n$ immer kleiner und kleiner, je grösser n wird, und kann so klein werden, als man will, wenn man nur n gros genug nimmt. Also läßt sich wiederum die Reihe allemal so weit fortsetzen daß $1 - (\frac{c}{d})^n$ so wenig, als man will, von der 1 unterschieden ist, und man kann also in der Bedeutung, die beym vorigen §. weitläuftig ist erklärt worden, auch hier sagen, die Reihe, so weit als möglich, fortgesetzt, oder die unendliche Reihe habe zur Summe

$$\frac{\frac{a}{b}.1}{1 - \frac{c}{d}}$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich nach den gewöhnlichen Ausdrückungen von Brüchen zu ändern, in folgende: man multiplicire, was oben und unten steht mit d, so wird

wird er $\dfrac{\dfrac{a}{b}\cdot d}{d-c}$; und nun multiplicire man, was oben und unten steht, mit b, so wird

er $\dfrac{ad}{b.(d-c)} = \dfrac{ad}{bd-bc}$

Der 1. Zusatz.

§. 198. Wenn $a = c$, $b = d$, also die Reihe $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, u. s. w. so ist dieser unendlichen Reihe

Summe $\dfrac{a.b}{b.(b-a)} = \dfrac{a}{b-a}$

Ist also noch überdiß $a = 1$; so ist die Summe $\dfrac{1}{b-1}$.

Dieser letzte Ausdruck enthält also, nachdem man statt b eine andere und andere ganze Zahl setzt, die Summen unzählicher solcher unendlichen Reihen.

Es sey

$b = 2$ so ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots = 1$

$= 3$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \ldots = \frac{1}{2}$

$= 4$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \ldots = \frac{1}{3}$

$= 5$ $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} \ldots = \frac{1}{4}$

woraus man die Beschaffenheit dieser Summen leicht

einse-

einsehen wird. Die Puncte bedeuten, daß man nach den angegebenen ersten drey Gliedern jeder Reihe sich noch unzählich viel vorstellen müsse, oder daß man sich die Reihe unendlich vorstellen müsse.

Wäre $a=2$, $b=5$, $c=3$, $d=4$; also die Reihe

$$\frac{2}{5}+\frac{2.3}{5.4}+\frac{2.9}{5.16}+\frac{2.27}{5.64} \; \ldots$$

so fände sich aus dem allgemeinen Ausdrucke am Ende des 197. §. ihre Summe $\frac{2.4}{5.(4-3)}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$. Je mehr man Glieder dieser Reihe wirklich berechnete und zusammen addirte, desto näher würde man dieser Summe kommen.

Ist $a=3$, $b=1$, $c=2$, $d=7$; so entsteht die Reihe $3+\frac{3.2}{7}+\frac{3.4}{49}=\frac{3.8}{343} \ldots$ deren Summe auf die nur angezeigte Art $\frac{3.7}{1.(7-2)}=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$

Und so kann man dergleichen Reihen, so viel man will, erdenken, und auf diese Art summiren.

Der 2. Zusatz.

§. 199. Wäre $d=c$; so hätte man folgende Reihe zu summiren:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}$$

Das

Das heißt einerley Grösse, es möchte nun eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, zu wiederholtenmalen zu sich selbst zu addiren. Die Summe einer gewissen Menge solcher gleichen Grössen ist ohne Zweifel so viel, als eine dieser Grössen so vielmal genommen, so viel ihrer sind; z. E. die Summe von 10, dergleichen ist $= 10 . \frac{a}{b}$. Stellt man sich also diese Reihe unendlich vor, das ist: stellt man sich $\frac{a}{b}$ unzählich vielmal vor, so ist klar, daß die nur erwehnte Summe grösser werden muß, als jede Grösse, die man angeben kann; so klein man auch $\frac{a}{b}$ setzt, wenn man es nur von einer Grösse annimmt, die sich angeben läßt. Denn wäre z. E. $\frac{a}{b} = \frac{1}{1000000}$, und man stellt sich diesen so kleinen Bruch eine Millionmal nach einander vor, so würde die Summe einer solchen Reihe doch eine Billion, und also sehr gros seyn.

Wenn man sich also diese Reihe lauter gleicher Grössen, so weit man will, fortgesetzt vorstellen darf, so kann allemal ihre Summe jede Grösse, so gros als man auch solche Grösse annimt übersteigen, im nur gebrauchten Exempel kann sie grösser als eine Billion, oder jede andere Zahl, so gros man auch eine solche Zahl annimmt, seyn.

Dieses druckt man so aus: Die Summe unzählich vieler gleicher Grössen, oder das Vielfache einer gegebenen Grösse durch eine unendlich grosse Zahl sey unendlich.

Für

Für $d = c$ wird der Ausdruck der Summe am Ende des 197. §. $\frac{ad}{b.0}$. Ein solcher Quotient, dessen Dividendus eine gegebene Grösse hat, der Divisor $= 0$ ist, bedeutet allemal eine unendliche Grösse. Dieses gründet sich darauf: je kleiner der Divisor in Vergleichung mit dem Dividendus ist, desto öfter ist jener in diesem enthalten, desto grösser ist der Quotient. Wenn man sich also vorstellt der Divisor nehme bis auf Nichts ab, der Dividendus aber behalte eine endliche Grösse, oder eine solche Grösse, die sich angeben läßt, so wächst der Quotient immer mehr und mehr und übersteigt alle Grössen, die sich angeben lassen, das heißt: er wird unendlich. Man kann wohl eigentlich nicht Etwas mit Nichts dividiren; aber man kann sich vorstellen, daß der Divisor, bis er Nichts geworden ist, immer kleiner und kleiner geworden ist, und also einen immer grössern und grössern Quotienten gegeben hat, wodurch der Quotient alle Gränzen endlicher Grössen überstiegen hat.

Der 3. Zusatz.

§. 200. Wolte man in dem Ausdrucke am Ende des 197. §. c grösser als d setzen, so gäbe dieser Ausdruck etwas verneintes, und das wäre offenbar ungereimt, denn man nimmt die Glieder der Reihe alle positiv an, und daher können sie, so viel oder so wenig ihrer sind, nie eine verneinte Summe geben. Der Fehler dieses Verfahrens besteht in folgendem: Der Ausdruck am Ende des 197. §. ist aus der Voraussetzung gefunden worden, daß $\frac{c}{d}$ auf eine höhere Potenz immer was kleineres gebe,

oder

oder ein eigentlicher Bruch sey, daß die folgenden Glieder der Reihe immer kleiner und kleiner und so klein als man will werden. Ist aber c grösser als d, so ist diese Voraussetzung falsch und $1 - (\frac{c}{d})^n$ ist eine verneinte Grösse, die immer grösser und grösser wird, je mehr n wächst. Daher kan man nun nicht annehmen, daß $1 - (\frac{c}{d})^n$ der 1 so nahe kömt, als man nur will, je grösser n gesetzt wird. Es ist also kein Wunder, daß die Formel am Ende des 197. §. etwas ungereimtes giebt, wenn man sie auf einen Fall anwendet, bey dem dasjenige nicht gilt, woraus sie ist hergeleitet worden.

Anmerkung.

§. 201. Auf die Art, wie die Summirung solcher unendlichen Reihen ist vorgetragen worden, fallen alle Schwierigkeiten und seltsam scheinende Sätze weg, die man sonst zuweilen dabey zu finden glaubt, als: daß eine unendliche Reihe grösser als eine andere sey, daß eine unendliche Reihe ein letztes Glied habe, und dieses Nichts seyn soll. Diese und andere Sätze enthalten gar nichts, das jemanden befremden könnte, wenn man die Wörter in den vorhin bestimmten Bedeutungen nimmt. Alles Paradoxe bey ihnen kömt auf unrichtig verstandene Ausdrücke an.

Als eine Anwendung dieser Rechnungen läßt sich noch eine Wiederlegung eines berühmten Beweises beybringen, durch den Zeno vor Alters hat darthun wollen, daß keine Bewegung möglich sey, oder vielmehr, daß bey der Be-

wegung das Unbegreifliche statt finde: der Schnelleste werde das Langsamste nicht einholen.

Man stelle sich vor in A sey Achilles,

A S T V W

den Homer durch das Beywort, des **Schnellfüßigen**, bezeichnet, in S eine Schildkröte. Achilles sey hundertmal geschwinder als die Schildkröte, und in dem Augenblicke, da er zu laufen anfängt, fängt die Schildkröte an fortzukriechen. In der Zeit also, da er aus A in S kömt, ist sie aus S in T gekommen, so daß $ST = \frac{1}{100} AS$; und in der Zeit, da er durch ST läuft, kriecht sie durch $TV = \frac{1}{100} ST$, und in der Zeit, da er durch TV kömt, kömt sie durch $VW = \frac{1}{100} TV$, kurz, wenn er aus einer Stelle, wo er sich in irgend einem Augenblicke befand, in die Stelle gekommen ist, wo sich die Schildkröte in eben dem Augenblicke befand, so ist sie von dieser ihrer Stelle um $\frac{1}{100}$ der Entfernung beyder Stellen fortgekrochen, und er wird sie also nie erreichen.

Indessen erhält schon aus diesem Vortrage, daß Achilles der Schildkröte immer näher und näher kommen wird. Wenn sich also zeigen läßt, daß beyder Entfernung, in einer gewissen kurzen Zeit, kleiner als jede angebliche Grösse wird, so muß man wohl zugestehen, daß er sie erreiche.

Man setze die erste Entfernung AS, z. E. einer Meile, und nenne sie $= 1$; weil ST, TV, VW, und s. w. immer die folgende Entfernung hundertmal kleiner wird, als die vorhergehende, so machen diese Entfernungen nachstehende Reihe aus:

$$1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} \ldots\ldots$$

wo

wo in §. 197, $a = 1 = b = c$, und $d = 100$. Stelle man sich also diese Reihe unendlich fortgesetzt vor, so ist ihre Summe nach dem Ausdrucke am Ende des 197. §. $\frac{1 . 100}{1 . (100 - 1)}$

$= \frac{100}{99} = 1 + \frac{1}{99}$. Die Summe der Entfernungen also zwischen dem Achilles und der Schildkröte, so viel ihrer auch seyn mögen, das ist der Weg, den Achilles zurück zu legen hat, um die Schildkröte zu erreichen, beträgt nicht mehr als $1 + \frac{1}{99}$ Meilen, und wenn er also z. E. eine Meile in einer Stunde zurücke legt, so erreicht er in $1 + \frac{1}{99}$ Stunden die Schildkröte, die eine Meile vor ihm voraus hatte.

So läßt sich dieser Einwurf gegen die Möglichkeit der Bewegung auflösen, den man so wohl wegen des zum Beyspiele gebrauchten Helden, als wegen der Stärke, die man in diesem Einwurfe zu finden glaubet, Zenons Achilles genannt hat.

Die 70. Aufgabe.

§. 202. **Eine Grösse, die durch einen Buchstaben ausgedruckt ist, mit einer Grösse zu dividiren, die durch zwey Buchstaben ausgedruckt ist.**

Auflösung.

Die zu dividirende sey $= a$, die dividirende $= b + c$

$$b + c)\ a\ (\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5} \text{ ꝛc.}$$

$$a + \frac{ac}{b}$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$-\frac{ac}{b}$$

$$-\frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2}$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$+\frac{ac^2}{b^2}$$

$$+\frac{ac^2}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3}$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$-\frac{ac^3}{b^3}$$

$$-\frac{ac^3}{b^3} - \frac{ac^4}{b^4}$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$+\frac{ac^4}{b^4} \text{ ꝛc.}$$

Denn b in a dividirt, gibt $a : b$, diesen Quotienten mit dem Divisore $b + c$ multiplicirt, gibt $a + ac : b$, von dem Dividendo a abgezogen, bleibt $- ac : b$. Wird dieser Rest wieder mit b dividirt, gibt es $- ac : b^2$, und so weiter unendlich fort. Woraus auch ohne weiteres Dividiren alle Glieder nach einander gefunden werden: denn ein jeder Zehler ist ein Product aus dem Dividendo und der Dignität des zweyten Theils des Divisors, deren Exponent um 1 weniger als Glieder, der Nenner aber die Dignität des zweyten Theils, deren Exponent der Zahl der Glieder gleich. Und die ungraden Glieder haben +, die geraden aber —.

Der 1. Zusatz.

§. 203. Man setze $a=1$, $b=2$, $c=1$, so ist $a:b - ac:b^2$ ꝛc. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ ꝛc. Da nun $a:(b+c)=\frac{1}{3}$, so siehet man, daß das erste Glied $=\frac{1}{2}$ zu viel, dahero das folgende Glied $=\frac{1}{4}$ abgezogen werden müsse, welches $\frac{1}{4}$ gibt, welches wieder zu wenig; darum das folgende $=\frac{1}{8}$ zu addiren, so $\frac{3}{8}$ gibt, so wieder zu viel, u. s. w. welches klärlich anzeiget, daß so man die Reihe bey den ungraden Gliedern endiget, allemal etwas zu viel, bey den graden aber etwas zu wenig, doch daß der Fehler immer kleiner werde, und so klein werden kann, als man nur will, so daß man durch diese Reihe, wenn man sie nur weit genug fortsetzt, dem eigentlichen Quotienten so nahe kommen kann, als man nur will.

Der 2. Zusatz.

§. 204. Es gibt Fälle, da nach diesem Ausdruck einer unendlichen Reihe dasjenige, was bey jedem Glied zu viel und zu wenig ist, immer einerley bleibet, daß man dahero der wahren Zahl nicht näher komt, wodurch dieser Ausdruck unnütz wird, als: Es sey $a=1$, $b=1$, $c=1$, so ist die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ ꝛc. Bey dem ersten Glied ist um $\frac{1}{2}$ zu viel, bey dem zweyten um $\frac{1}{2}$ zu wenig, u. s. w. woraus erhellet, daß diejenige falsch geurtheilet haben, die behauptet, eine unendliche Anzahl Nullen seyen $=\frac{1}{2}$, weil $1 - 1 = 0$ sey, und dieses $1 - 1$, unendlich fort, gleich sey $1:(1+1)=\frac{1}{2}$. Denn wenn auch ihre Meynung einigen Schein haben solte, so müßten sie zeigen können, daß die unendliche Anzahl der Glieder eine gerade Zahl sey, denn wäre sie ungerad, so würde $1 - \frac{1}{2}$ seyn. Es ist also hiebey weiter

nichts, als bey jedem Glied ist einerley Mangel, und wechselsweise entweder zu viel oder zu wenig.

Der 3. Zusatz.

§. 205. Ja, es gibt so gar Fälle, da der Fehler nicht nur immer gleich, sondern gar grösser wird, wodurch der Ausdruck noch unbrauchbarer wird, als es sey $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, so ist $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - - 32 + 64$ ꝛc.

Der 4. Zusatz.

§. 206. Hieraus erhellet, daß, wenn b nicht grösser als c angenommen wird, dieser Ausdruck durchaus unnützlich werde: denn man setze $b = c$, so werden alle Glieder $a:c$, und würde eben das erfolgen, was §. 204. Setzt man $b < c$, und das um wie vielmal c grösser ist $= m$, so ist $bm = c$, wird nun dieses in die Reihe gesetzt,

so komt $\frac{a}{b} - \frac{am}{b} + \frac{am^2}{b} - \frac{am^3}{b}$ ꝛc. welches anzeiget, daß der Fehler immer grösser werde, und daher die Reihe von der wahren Zahl immer weiter abweiche, wie §. 205.

Die 10. Erklärung.

§. 207. Wenn eine geometrische Progression von 1 anfangt, und eine arithmetische von 0, so werden die letzten Glieder die Logarithmi der Glieder in der ersten, mit denen sie übereintreffen, genennet.

Anmerkung.

§. 208. Die beyden Reihen seyen

1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
0	1	2	3	4	5	6	7

da ist 0 der Logarithmus von 1, 1 der Logarithmus von 2, 3 der Logarithmus von 8, 6 von 64, ꝛc. Aus der Erklärung wird man leicht begreiffen, daß es einerley sey, was für ein Exponent und Differenz in den beyden Progressionen angenommen werde.

Die 71. Aufgabe.

§. 209. **Die Eigenschaften der Logarithmorum zu untersuchen.**

Auflösung.

Der Exponent sey $= m$, die Differenz $= d$, so ist

1	m^1	m^2	m^3	m^4	m^5	m^6	m^7	m^8
o	d	$2d$	$3d$	$4d$	$5d$	$6d$	$7d$	$8d$ ꝛc.

Wenn man diese beyde Progressionen mit Aufmerksamkeit betrachtet, so nimt man wahr

1) daß die Exponenten der Dignitäten in den Gliedern der geometrischen Progression selbsten die Logarithmi der Glieder sind: denn von 1 ist der Exponent 0 (§. 60.). Es sind also die Exponenten in folgender arithmetischen Progression 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ꝛc.

2) Daß die Summe derer Logarithmorum von zwey Zahlen gleich sey dem Logarithmo ihres Products, als $3d + 5d = 8d =$ dem Logarithmo von m^8, dem Product aus m^3 und m^5, welches auch daraus leicht

zu begreiffen, weil die Dignitäten durch addiren der Exponenten multiplicirt werden (§. 58.) und die Exponenten Logarithmi der Dignitäten sind.

3) Eben so gibt die Differenz der Logarithmorum zweyer Zahlen den Logarithmum ihres Quotienten (§. 59.) als $7d - 3d = 4d$ = Logar. von m^4, als dem Quotienten von m^7 und m^3.

4) Wenn der Logarithmus einer Zahl mit 2. 3. 4. ꝛc. dividirt wird, so bekomt man den Logarithmum von der 2ten, 3ten, 4ten ꝛc. Wurzel selbiger Zahl, $6d$ ist Logar. von m^6, wird nun $6d$ mit 3 dividirt, gibt es $2d$ den Logar. von m^2, welches die dritte oder Cubicwurzel von m^6 ist. (§. 63.).

5) Auf gleiche Art komt durch die Multiplication des Logarithmi der Logarithmus der Dignität heraus, (§. 62.) $2d$ als Logarithmus von m^2 mit 4 multiplicirt, gibt $8d$ = Log. von m^8, so die vierte Dignität von m^2.

6) Wenn man von einer Dignität den Logarithmum haben will, so darf man nur den Logarithmum der Wurzel mit dem Exponenten multipliciren. Als man wolte von m^7 den Logarithmum haben, nimt man den Logarithmum von m, der d ist, und multiplicirt ihn mit dem Exponenten ^{7}, so hat man den verlangten Logarithmum $7d$.

Der 1. Zusatz.

§. 210. Weil der Bruch eigentlich ein Quotient aus der Division des Nenners in den Zehler ist, und der Nenner, wenn es ein eigentlicher Bruch ist, grösser als der Zehler ist, so wird der Logarithmus eines Bruches ne-

negativ, als von $\frac{m^3}{m^5}$ ist der Logarithmus $3d - 5d$

$= - 2d.$ (§. 61.).

Der 2. Zusatz.

§. 211. Will man zwischen zwey Zahlen die mittlere Proportionalzahl suchen, so müssen sie multiplicirt, und aus dem Product die Quadratwurzel gezogen werden, dahero auch ihre Logarithmi addirt und die Summe halbirt werden muß, um den Logarithmum von der mittleren Proportionahlzahl zu haben.

Der 9. willkührliche Satz.

§. 212. Man benennet den Logarithmum einer Zahl mit L oder l. Will man aber die Zahl selber wieder anzeigen, setzt man N vor L.

Der 1. Zusatz.

§. 213. Daher ist der Logarithmus von $a = La$, von $ab = La + Lb$, von $\frac{a}{b} = La - Lb$, von $a^x = xLa$, von $\sqrt[3]{a^2} = \frac{2}{3} La$, weil $\sqrt[3]{a^2} = a^{2:3}$ von $\sqrt[3]{a^2 b^4} = \frac{2}{3} La + \frac{4}{3} Lb$, von $\sqrt{ab} = \frac{1}{2} La + \frac{1}{2} Lb$ u. s. w. desgleichen $NLa = a$ 2c.

Der 2. Zusatz.

§. 214. Weil das letzte Glied in einer geometri-

schen Progression $= am^{n-1}$, so ist dessen Logarithmus $La + (n-1)Lm$, wodurch die Beschwerlichkeit des multiplicirens gehoben wird.

Die 72. Aufgabe.

§. 215. Aus dem gegebenen ersten Glied dem Exponenten und der Summe einer geometrischen Progression die Zahl der Glieder zu finden.

Auflösung.

Das erste Glied sey $= a$, der Exponent $= m$, die Zahl der Glieder $= x$, so ist das letzte Glied am^{x-1}, die Summe $= c$, so ist

$$\frac{am^x - a}{m-1} = c \quad (\S.103.)$$

$$am^x - a = (m-1)c$$

$$am^x = (m-1)c + a$$

$$La + xLm = L((m-1)c + a) \quad (\S.213.)$$

$$xLm = L((m-1)c + a) - La$$

$$x = \frac{L((m-1)c + a) - La}{Lm}$$

Die 1. Anmerkung.

§. 216. Die Anfänger merken hier, daß wenn der Logarithmus von addirten oder subtrahirten Grössen zu nehmen ist, als hier von $(m-1)c + a$, man ja nicht setze $L(m-1)c + La$: denn das Addiren der Logarithmen erfordert, daß die Grössen vorher seyen multiplicirt gewesen (§. 209.). Dahero dergleichen Grössen einzuschliessen und zusammen zu nehmen, und alsdenn erst L davor zu setzen, oder von ihnen der Logarithmus zu nehmen.

Die

Die 2. Anmerkung.

§. 217. Damit man die logarithmische Formel $x = \frac{L(c(m-1)+a) - La}{Lm}$ desto deutlicher verstehen möge, wollen wir solche mit einem Exempel erläutern: Es sey $a=2$, $m=3$, $c=2186$, so ist $c(m-1)=4372$, dazu addirt $a=2$ gibt 4374, davon der Logarithmus in den gewöhnlichen Tabellen

$$L(c(m-1)+a) = 36408788$$
$$-La = 03010300$$
$$Lm = 4771212)\,33398488\,(7$$
$$33398484$$
$$4$$

also waren es 7 Glieder; daß aber die Division nicht genau aufgegangen, da es doch genau 7 Glieder in der Progession sind, komt daher, weilen die Lagorithmi in den Tabellen nur durch Näherung gefunden werden, dahero ein Fehler in der letzten oder auch zwey letzten Ziffern für nichts zu achten ist; zumalen es in diesem Fall $\frac{4}{4771212} = \frac{1}{1192803}$ ein Fehler ist, den man nicht angeben, folglich für nichts halten kann.

Die 73. Aufgabe.

§. 218. Aus der gegebenen Summe, dem ersten und letzten Glied einer geometrischen Progression, die Zahl der Glieder und den Exponenten zu finden.

Auflösung.

Das erste Glied sey $=a$
das letzte $=b$
die Summe $=c$

die

die Zahl der Glieder $=x$

der Exponent $=y$, so ist

$$\frac{b-a}{y-1}+b=c$$

$$b-a+by-b=cy-c$$

$$c-a=cy-by$$

$$\frac{c-a}{c-b}=y$$

$$ay^{x-1}=b$$

$$La+(x-1)Ly=Lb$$

$$(x-1)Ly=Lb-La$$

$$Ly=\frac{Lb-La}{x-1}$$

$$L(c-a)-L(c-b)=Ly$$

$$L(c-a)-L(c-b)=\frac{Lb-La}{x-1}$$

$$(x-1)(L(c-a)-L(c-b))=Lb-La$$

$$x-1=\frac{Lb-La}{L(c-a)-L(c-b)}$$

$$x=\frac{Lb-La}{L(c-a)-L(c-b)}+1$$

Es sey $c=728$, $a=2$, $b=486$, so ist $y=\frac{728}{728}=\frac{2}{486}=\frac{726}{342}=3$

$Lb=26866363$

$La=03010300$

$Lb-La=23856063$

$L(c-a)=28609366$

$L(c-b)=23838154$

$L(c-a)-L(c-b)=4771212$

$4771212\,)\,\frac{23856063}{23856060}\,(\,5+1=6=x$

3

Die

Die 74. Aufgabe.

§. 219. Ein Capital soll in drey Jahrsfristen samt dem Zinß a 5 pro Cent dergestalt bezahlet werden, daß jedes Jahr gleich viel von Capital und Zinß zusammen genommen bezahlt werde, wie viel wird jedes Jahr am Capital abgetragen?

Auflösung.

Das Capital sey $= a$
das erste Jahr werde bezahlt $= x$
das zweyte , , , , $= y$
folglich das dritte $= a - x - y$
und da 5 pro Cent $\frac{1}{20}$ vem Capital ist, so wird im ersten Jahr an Zinsen bezahlt $\frac{1}{20}a$
im zweyten $\frac{1}{20}(a - x)$
im dritten $\frac{1}{20}a(a - x - y)$
Folglich ist

$$x + \frac{1}{20}a = \frac{1}{20}(a - x) + y$$

$$20x + a = a - x + 20y$$

$$21x = 20y$$

$$\frac{21x}{20} = y$$

Eben so

$$x + \frac{1}{20}a = \frac{1}{20}(a - x - y) + a - x - y$$

$$20x + a = a - x - y + 20a - 20x - 20y$$

$$41x = 20a - 21y$$

$$21y = 20a - 41x$$

$$y = \frac{20a}{21} - \frac{41x}{21}$$

21x

$$\frac{21x}{20} = \frac{20a}{21} - \frac{41x}{21}$$

$$\frac{441x}{20} = 20a - 41x$$

$$441x = 400a - 820x$$

$$1261x = 400a$$

$$x = \frac{400}{1261}a$$

Es sey $a = 2522$, so ist $x = \frac{400.2522}{1261} = \frac{1008800}{1261}$

$= 800$, und weil $y = \frac{21}{20}x$, so ist $y = \frac{21.800}{20} =$

$\frac{16800}{20} = 840$, folglich im dritten Jahr 882.

Probe:

1 Jahr 800, + Zinß vom ganzen 126 fl. 6 kr = 926 fl. 6 kr.
2 Jahr 840, + Zinß von 1722, 86 fl. 6 kr. = 926 fl. 6 kr.
3 Jahr 882, + Zinß von 882, 44 fl. 6 kr. = 926 fl. 6 kr.

Die 75. Aufgabe.

§. 220. Vorhergehende Aufgabe allgemein aufzulösen.

Auflösung.

Das Capital sey $= a$

der Zinß von dem Capital sey $= \frac{n}{m}$

das

Das erste Jahr werde bezahlt x
das zweyte y
das dritte z
das vierte v
das fünfte q 2c.

Es wird demnach bezahlt

im 1 Jahr $x + \frac{na}{m} = \frac{mx + na}{m}$

2. $y + \frac{n(a - x)}{m} = \frac{my + na - x}{m}$

3. $z + \frac{n(a - x - y)}{m} = \frac{mz + na - nx - ny}{m}$

4. $v + \frac{n(a - x - y - z)}{m} = \frac{mv + na - nx - ny - nz}{m}$

5. $q + \frac{n(a - x - y - z - v)}{m} = \frac{mq + na - nx - ny - nz - nv}{m}$

Es ist

$$\frac{mx + na}{m} = \frac{my + na - nx}{m}$$

$$mx + na = my + na - nx$$

$$mx + nx = my$$

$$\frac{(m + n)x}{m} = y$$

Fer-

Ferner

$$my + na - nx = mz + na - ux - nz$$

$$my + uy = mz$$

$$\frac{(m + n\; y}{m} = z$$

Desgleichen

$$mz + na - nx - ny = mv + na - nx - ny - nz$$

$$uz + nz = mv$$

$$\frac{(m + n)\, z}{m} = v$$

Eben so

$$mv + na - nx - ny - nz = mq + na - nx - ny - nz - nv$$

$$mv + v = mq$$

$$\frac{(m + n)\, v}{m} = q$$

Hieraus ist klar, daß in den Jahren nach einander am Capital abgetragen werde

1) $x = z \qquad = x\,(1)$

2) $y = x\frac{(n+)}{m} \qquad = x\frac{(m + n)}{m}$

3) $z = y\frac{(m + n)}{m} \qquad = x\frac{(m + n)^2}{m^2}$

4) $v = z\frac{(m + u)}{m} \qquad = x\frac{(m + n)^3}{m^3}$

5) $q = v\frac{(m + n)}{m} \qquad = x\frac{(m + n)^4}{m^4}$ ꝛc.

denn $y = x\frac{(m + n)}{m}$ folglich $z = x\frac{(m + n)}{m}$

$(m +$

$\frac{(m+n)}{m} = x\frac{(m+n)^2}{m^2}$ u. s. w.

Und da eine jede Zahlung $\frac{m+n}{m}$ von vorjähriger Zahlung ist, das ist, $1+\frac{n}{m}$, so kann, wenn die erste Zahlungssumme gefunden worden, die folgende gefunden werden, wenn nur der Zinß $=\frac{n}{m}$ der vorigen zu ihr addirt wird.

Nicht weniger zeiget sich, daß alle Zahlungstermine zusammen genommen, eine geometrische Progression ausmachen, deren erstes Glied $=1$, deren Exponent $\frac{m+n}{m}$, und die Zahl der Glieder, so gros als die Zahl der Termine ist, wenn solche Progression mit x multiplicirt worden. Man nenne indessen diese Progression p, so sind alle Zahlungen zusammen genommen $=px$. Da aber dieses die ganze zu zahlende Summe ausmacht, so ist $px=a$

$$x=\frac{a}{p}$$

Hieraus können folgende Regeln gezogen werden:

1) Das Interesse ist ein Bruch von dem Capital, als: $\frac{1}{20}$, wenn man 5 pro Cent gibt; $\frac{3}{50}$, wenn man 6 pro Cent gibt. Dieses Bruchs Nenner und Zehler addirt, und setzet bruchweiß darunter den Nenner, als $\frac{21}{20}$ oder $\frac{53}{50}$, 2c. so habt ihr den Exponenten zu folgender Progression.

2) Summiret eine geometrische Progression, deren erstes Glied 1, der Exponent der N. 1. gefundene

L Bruch,

Bruch, die Zahl der Glieder, so viel als Jahre gegeben sind.

3) Diese Summe dividirt in das gegebene Capital, so habt ihr, was im ersten Jahr zu zahlen ist.

4) Addirt den Zinß des ersten Termins zum ersten, so habt ihr den zweyten, desgleichen den Zinß des zweyten zum zweyten, so habt ihr den dritten, u. s.

5) Rechnet allezeit den Zinß von dem noch stehen gebliebenen Capital darzu.

Zum Exempel: 68962 fl. soll auf vier Jahr samt dem Zinß zu 5 pro Cent bezahlt werden, so ist die Progression

$$1 \quad \frac{21}{20} \quad \frac{441}{400} \quad \frac{9261}{8000}$$

deren Summe ist $\frac{34481}{8000}$, in 68962 dividirt, gibt 16000, der Zinß dazu 800 = 16800, fürs zweyte Jahr; der Zinß dazu 840 = 17640, fürs dritte Jahr; der Zinß dazu 882 = 18522, fürs vierte Jahr, also

1. 16000 + Z. vom ganzen 3448 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
2. 16800 + Z. v. 52962; 2648 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
3. 17640 + Z. v. 36162; 1808 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.
4. 18522 + Z. v. 18522; 926 fl. 6 kr. = 19448 fl. 6 kr.

68962

Der 1. Zusatz.

§. 221. Setzt man die Zahl der Jahre $= v$, so ist das letzte Glied $= \frac{(m+n)^{v-1}}{m^{v-1}}$ und der Exponent weniger 1 $= \frac{m+n}{m} - 1 = \frac{n}{m}$, daher die Summe der Progression $\left(\frac{(m+n)^v}{m^v} - 1\right) : \frac{n}{m} = \frac{m(m+n)^v}{nm^v} - \frac{m}{n}$

folg-

folglich ist $\frac{xm(m+n)^v}{nm^v} - \frac{xm}{n} = a$

$$xm(m+n)^v - xm^{v+1} = anm^v$$

$$x = \frac{anm^v}{m(m+n)^v - m^{v+1}}$$

$$= \frac{anm^{v-1}}{(m+n)^v - m^v}$$

Der 2. Zusatz.

§. 222. Addiret man den Zinß des ersten Jahrs $= \frac{an}{m}$ dazu, so hat man, was jedes Jahr überhaupt zu zahlen sey, nemlich $\frac{anm^{v-1}}{(m+n)^v - m^v} + \frac{an}{m} =$

$$\frac{anm^v + an(m+n)^v - anm^v}{m(m+n)^v - m^{v+1}} = \frac{an(m+n)^v}{m((m+n)^v - m^v)}$$

das ist, das Interesse vom ganzen Capital wird mit $(m+n)^v$ multiplicirt und mit $(m+n)^v - m^v$ dividirt.

Der 3. Zusatz.

§. 223. Es wäre einer ein Capital baar zu zahlen schuldig; es wäre aber so wohl dem Glaubiger als Schuldner bequem, daß solches in etlichen Terminen geschehen mögte, jedesmal mit gleicher Summe samt dem Zinß: so würde die Formel §. 222. die Summe bestimmen.

Die 76. Aufgabe.

§. 224. Eine Regel zur Rabbatrechnung zu finden, das ist, wenn ein Capital erst nach etlichen Jahren ohne Zinß zu zahlen wäre, wie viel jezt baar bezahlt werden müßte.

Auflösung.

Das Capital sey $= a$

der Zinß, ein Bruch vom Capital $= \frac{n}{m}$

die Zahl der Jahre $= r$

die Summe, die baar zu zahlen, $= x$

Weil $\frac{n}{m}$ ein Bruch von dem ganzen Capital ist, so würde das Capital nach Verlauf eines Jahres, wenn es 1 wäre, seyn $1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}$; ist aber das Capital x, so wird man nach der Regel de Tri mit Verfluß des Jahrs davon haben $x \frac{(m+n)}{m}$; denn man würde sprechen müssen: 1 gibt $\frac{m+n}{m}$, was gibt x?

Legt

Legt man nun $x \frac{(m+n)}{m}$ wieder zu Capital an, so hat man nach Verlauf des zweyten Jahres $x \frac{(m+n)^2}{m^2}$ nach der Regel de Tri.

$$1 \text{ gibt } \frac{m+n}{m}, \text{ was } x \frac{(m+n)}{m}$$

Auf gleiche Art würde man mit End des dritten Jahrs haben $x \frac{(m+n)^3}{m^3}$ und überhaupt, so viel es Jahre sind, so hoch steigt der Exponent der Dignität von $\frac{m+n}{m}$. In den Jahren r wird es demnach seyn $x.\frac{(m+n)^r}{m^r}$. Nun muß dieses dem schuldigen Capital gleich seyn, weil der Glaubiger auf diese Zeit so viel haben solle, folglich $x.\frac{(m+n)^r}{m^r} = a$

$$x(m+n)^r = am^r$$

$$x = \frac{am^r}{(m+n)^r}$$

Die Regel ist also:

1) Multiplicirt den Nenner des Bruchs, der den Zinß, als den Theil vom Ganzen, anzeigt, so vielmal in sich selber, als Jahre gegeben sind, und multipliciret, was heraus gekommen, mit dem gegebenen Capital.

2) Eben so vielmal multipliciret in sich selbst die Summe aus dem Zehler und Nenner des Zinßbruchs, und dividiret das heraus gekommene in ersteres Product.

Zum Exempel: Das Capital seye 1000 fl. die Jahre 4, Zinß 5 vom hundert, daher der Bruch $\frac{1}{20}$ ist.

20	21	160000
20	21	1000
400	21	194481) 160000000 ($822\frac{136618}{194481}$
20	42	1555848
8000	441	441520
20	21	388962
160000	441	525580
	882	388962
	9261	136618.
	21	
	9261	
	18522	
	194481	

Der 1. Zusatz.

§. 225. Mit Logarithmis gehet es leichter, da obige Aequation also zu stehen komt:

$$Lx = La + rLm - rL(m+n)$$
$$= La - r(L(m+n) - Lm)$$

Voriges Exempel wird demnach also aufgelöset:

L. von

L. von 1000 = 30000000
L. von 20, 4mal 52041200

82041200
L. von 21, 4mal 52888772

29152428

dem in den Tabellen am nächsten komt $822\frac{7}{10}$

Der 2. Zusatz.

§. 226. Wäre ein Capital zielerweis ohne Zinß zu bezahlen, und zwar das erstemal gleich baar $= a$, das folgende Jahr wieder $= a$, u. s. w. so würde an statt des zweyten Termins zu zahlen seyn $am : (m+n)$, statt des dritten $am^2 : (m+n)^2$ u. s. w. folglich für den letzten, wenn die Zieler $= r$, $am^{r-1} : (m+n^{r-1})$, welches eine geometrische Progression gibt, davon das gröste Glied $= a$, das kleinste $= am^{r-1} : (m+n)^{r-1}$, der Exponent $(m+n) : m$ dahero das Glied weiter als das gröste $= a(m+n) : m^r$ beyder Differenz $a(m+n) : m - am^{r-1} : (m+n)^{r-1} = a((m+n)^r - m^r) : m(m+n)^{r-1}$ mit dem Exponenten weniger eins $= n : m$ dividirt $= a((m+n)^r - m^r) : n(m+n)^{r-1}$, welches den Wehrt ausdruckt, wie viel zu bezahlen wäre, wenn die Zahlung baar geschehen solte.

Der 3. Zusatz.

§ 227. Solte erst nach Verfluß des ersten Jahrs der erste Termin bezahlt werden, so würde für den ersten $am : (m+n)$ und für den letzten $am\,(m+n)^r$ zu bezahlen seyn, und das weitere Glied über das gröste würde seyn $= a$, beyder Differenz aber $a - am : (m+n)^r = a((m+n)^r - m) : (m+n)$ mit $n : m$

dividirt $am((m+n)^{r} - m) : n(m+n)$, welches die Formel für diesen Fall gibt.

Die 77. Aufgabe.

§. 228. Zu finden, auf wie vielerley Art die Glieder in einer geometrischen Progression verändert werdan können, daß sie dennoch proportional bleiben.

Auflösung.

Verändert sie auf alle mögliche Weise, und untersuchet ob das Product der beyden äussern Glieder dem Product der beyden mitlern gleich seye, (§ 127.) oder ob der Exponent der beyden ersten dem Exponenten der beyden letztern gleich seye. Ist es so, so habt ihr noch eine Proportion; wo nicht, so ist auch keine Proportion mehr.

Das erste Glied seye $= a$, das dritte $= b$, der Exponent $= m$, so ist

$a : ma = b : mb$

1) $a : b = ma : mb$

2) $ma : a = mb : b$

3) $a + ma : a = b + mb : b$

4) $a + ma : ma = b + mb : mb$

5) $ma - a : ma = mb - b : mb$

6) $ma - a : a = mb - b : b$

7) $a^{n} : a^{n} m^{n} = b^{n} : b^{n} m^{n}$

8) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{am} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$

$a : ma = b : mb$

$b : mb = b : mb$

$$9)\ ab : m^2 ab = b^2 : m^2 b^2$$
$$c : mc = b : mb$$

$$10)\ acb : m^3 abc = b^3 : m^3 b^3 \text{ etc.}$$
$$11)\ ac : amc = b : mb$$
$$12)\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$$
$$13)\ ac : ma = bc : mb$$
$$14)\ \frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$$
$$15)\ ac : mac = bd : mbd$$
$$16)\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$$
$$a : ma = b : mb$$
$$ma : mna = mb : mnb$$

$$17)\ a : mna = b : mnb$$
$$a : ma = b : mb$$
$$ma : c = d : b$$

$$18)\ a : c = d : mb$$

Anmerkung.

§. 229. Man hat Ursache, diese Eigenschaften der geometrischen Proportion sich bekannt zu machen, weil die Proportion, wegen ihrem vielfältigin Nutzen, die Seele der Mathematick ist. Wir haben sie aber bis hieher versparet, weil wir noch wenig Gelegenheit gehabt, ihren Nutzen zu zei-

gen, und ohne solches werden die wichtigsten Wahrheiten von Anfängern öfters für gering gehalten und vernochläßiget.

Die 78. Aufgabe.

§. 230. Wann ein Gefäß voll Wein ist, und aus demselben eine gewisse gegebene Quantität heraus gelassen, mit so viel Wasser wieder angefüllt, und dieses etlichmal wiederholt wird, aus der Verhältnis des noch übrigen Weins zum Wasser den Inhalt des Gefässes zu finden.

Auflösung.

Das Gefäß halte $= x$
es werde heraus gelassen $= m$
wie vielmal solches geschehen $= n$
das Verhältnis des Wassers zum Wein $= a : v$

Wird das erstemal Wein $= m$ heraus gelassen und mit Wasser angefüllt, so bleibt an Wein übrig $= x - m$, und das ganze Gefäß verhält sich zum übrigen Wein $= x : x - m$; wird wiederum $= m$ heraus gelassen, so lauft Wasser und Wein nach Proportion heraus, nemlich um so viel jetzt Wein weniger im Gefäß ist, als von Anfang gewesen, um so viel weniger lauft auch heraus, also verhält sich, wie das ganze Gefäß zum erstmaligen Rest des Weins so, wie dieser Rest zum Rest, nach der zweyten Ablassung der Grösse m
$x : x - m = x - m : (x - m)^2 : x$.

Desgleichen bey dem dritten Herauslassen

$$x : x - m = \frac{(x-m)^2}{x} : \frac{(x-m)^3}{x^2}$$

wnd

Und so gehet es weiter fort, daß endlich der letzte Weinrest $= (x-m)^n : x^{n-1}$,
das Wasser $x-(x-m)^n : x^{n-1}$, dahero

$$a:v = x - \frac{(x-m)^n}{x^{n-1}} : \frac{(x-m)^n}{x^{n-1}}$$

$$a:v = x \quad -(x-m^n:(x-m)^n \text{ (§. 228. n. 11.)}$$

$$a+v:v = x^n:(x-m)^n \text{ (§. 228. n. 4.}$$

$$\sqrt[n]{a+v}:\sqrt[n]{v} = x:x-m \text{ (§. 228. n. 8.)}$$

$$\sqrt[n]{a+v}-\sqrt[n]{v}:\sqrt[n]{a+v} = m:x \text{ (§. 228. n. 6.)}$$

Es sey $a=19$, $v=8$, $n=3$, $m=4$, so ist

$$\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}:\sqrt[3]{27} = 4:x$$

$$3-2:3 = 4:x$$

$$1:3 = 4:12$$

Der 1. Zusatz.

§. 231. Wenn die Grössen a und v just so groß angenommen werden, als der Wein und das Wasser, so wird $a+v=x$, und die Proportion §. 230. bleibt noch

$$a+v:v = x^n:(x-m)^n$$

$$x:v = x:(x-m)^i$$

$$1:v = x^{n-1}:(x-m)_n$$

Wenn also der Inhalt des Gefässes $=x$, das auf einmal heraus gelassene $=m$, und wie vielmal solches geschehen $=n$ gegeben ist, so kann dtr Wein, der übrig geblieben ist, leicht gefunden werden.

$$x^{\ -1}:(x-m) = 1:v$$

nach

nach vorigem Exempel

$$12^2 : 8^3 = 1 : v$$

$$144 : 512$$

$$8)\ 18 : 64$$

$$2)\ 9 : 32$$

$$9)\ 32\ (3\tfrac{5}{9} = \text{Wein}$$

$$\begin{array}{l} 27 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$8\tfrac{4}{9} = \text{Wasser.}$$

dahero verhält sich das Wasser zum Wein

$$8\tfrac{4}{9} : 3\tfrac{5}{9}$$

$$9)\ 76 : 32$$

$$4)\ 19 ; 8$$

Der 2. Zusatz.

§. 232. Aus der Proportion $1 : v = x^n \quad 1 : (x-m)^n$, komt folgende Aequatiou

$$(x-m)^n = vx^{n-1}$$

$$nL(x-m) = Lv + nLx - Lx$$

$$Lx - Lv = nLx - nL(x-m)$$

$$\frac{Lx - Lv}{Lx - L(x-m)} = n$$

Wenn man also wissen will, wie viemal das Herauslassen zu wiederholen sey, damit eine gewisse verlangte Quantität Wein übrig bleibe, so gibt diese Formel die Regel dazu. Z. E. Das Gefäß hielte 108 Maas, man wolte 32 Maas übrig behalten, und liesse jedesmal 36 Maas heraus: so wäre

$$Lx = 20334238$$

$$Lv = 15051500$$

Lx

$$Lx - Lv = 5282738$$
$$Lx = 20334238$$
$$L(x - m) = 18573325$$
$$Lx - L(x - m = 1760913$$
$$1760913)5282738(3\text{mal}$$
$$5282839$$
$$-1$$

Käme ein Bruch heraus entweder allein oder mit ganzen, so müßte nicht das ganze m, sondern nur ein Theil davon, nach Maasgab des Bruchs, heraus gelassen werden.

Die 3. Zusatz.

§. 233. Wäre alles bekannt, wie §. 232, und man wolte finden, wie viel auf einmal heraus zu lassen, so käme

$$(x - m)^n = vx^{n-1}$$

$$x - m = \sqrt[n]{vx^{n-1}}$$

$$x - \sqrt[n]{vx^{n-1}} = m$$

Anmerkung.

§. 233. Auf eben diese Art verfährt man, wenn von einem Stück Silber etlichmal ein Stück abgeschnitten und mit Kupfer ersetzt wird.

Die 79. Aufgabe.

§. 235. Wenn man ein Capital hat, davon der Zinß zum jährlichen Unterhalt nicht zureicht, son-

sondern jährlich vom Capital etwas zugeschossen werden muß, zu finden, wenn das Capital aufgezehret werde.

Auflösung.

Das Capital sey $= a$

der Zinß $= \frac{n}{m}$.

der Zuschuß bey dem End des ersten Jahrs $= b$
die Anzahl der Jahre $= x$

Es ist klar, daß, da das Capital mit Schluß des ersten Jahrs um die Grösse b weniger worden: also auch um $nb:m$ weniger Zinß trage, folglich zu End des zweyten Jahrs über b noch $nb:m$ müsse zugeschossen werden, daß also der Zuschuß mit Schluß des zweyten Jahrs $= b + nb:m = b(m+n):m$

Hieraus folgt diese Verhältniß: wer ein Jahr b zuschießt, muß das andere $b\,(m+n):m$ zuschiessen.

$$b \;:\; b(m+n):m$$
$$1 \;:\; (m+n):m$$

daher kann durch die Regel de Tri gefunden werden, was mit Schluß des dritten Jahrs zugeschossen werden müsse: denn wer dieses Jahr 1 zuschießt, muß übers Jahr $(m+n):m$ zuschiessen.

$$1 : \frac{m+n}{m} = \frac{b(m+n)}{m} : \frac{b(m+n)^2}{m^2}$$

Hieraus siehet man schon, daß in dem vierten Jahr $(b(m+n))^3 : m^3$ u. s. w. zugeschossen werden müsse, und folglich in dem letzten Jahr $b(m+n)^{x-1} : m^{x-1}$

Alle Zuschüsse machen demnach zusammen genommen eine geometrische Progression aus, davon das erste

Glied

Glied $= b$, das letzte $= b\,(m+n)^{x-1} : m^{x-1}$, der Exponent $(m+n):m$. Daher die Differenz des ersten und eines weitern als des letzten $= b\,(m+n)^x : m^x - b$ mit $(m+n):m - 1 = n:m$ dividirt, gibt die Summe $= mb\,(m+n)^x\; mn -$ $mb:n$, da nun die Summe aller Zuschüsse dem Capital gleich seyn muß, wenn es aufgehen soll, so ist

$$\frac{mb(m+n)^x}{nm^x} - \frac{mb}{n} = a$$

$$\frac{mb(m+n)^x}{nm^x} = a + \frac{mb}{n}$$

$$\frac{b(m+n)^x}{m^x} = \frac{na}{m} + b$$

$$Lb + xL\,(m+n) - xLm = L\left(\frac{na}{m} + b\right)$$

$$xL\,(m+n) - xLm = L\left(\frac{na}{m} + b\right) - Lb$$

$$x = \frac{L\left(\frac{na}{m} + b\right) - Lb}{L(m+n) - Lm}$$

Es sey $a = 5000$, der Zinß 5 pro Cent, so ist der Zinß $= \frac{an}{m} = 250$, b sey $= 50$, $\frac{an}{m} + b = 300$

$L\ 300 = 24771212$
$L\ \ 50 = 16989700$

7781512

L 21

$L\ 21 \quad 13222193$
$L\ 20 \quad 13010300$

211893

$211893)7781512(36\frac{153364}{211893}$, das ist, 36 Jahre 264, Tage.

```
635679
-------
1424722
1271358
-------
 153364
```

Anmerkung.

§. 236. Es ist zwar an dem, daß man diese Aufgabe auch nach der gemeinen Rechenkunst hätte auflösen können, da man mit Schluß des ersten Jahrs 50 von 5000 subtrahirt, blieb 4950, davon das Interesse 247 fl. 30 kr. so würde zum Unterhalt Zuschuß im zweyten Jahre erfordert 52 fl. 30 kr. die müssen wieder von 4950 subtrahirt werden, u. s. w. bis endlich das ganze Capital aufgehet. Wer siehet aber nicht die grosse Beschwerlichkeit im Rechnen? Darum dient die Algebra nicht nur dazu, solche Aufgaben aufzulösen, die der gemeinen Rechenkunst unmöglich, sondern auch die unmöglichen ungemein zu erleichtern.

Der 1. Zusatz.

§. 237. Nennt man das, was jährlich verzehrt wird c, so ist $c = \frac{an}{m} + b$, und $b = c - \frac{an}{m}$, setzt man solches in obige Aequation $\frac{b(m+n)^x}{m^x} = \frac{na}{m} + b$, so komt

c——

$$c\frac{(m+n)^x}{m^x} - \frac{an}{m}\frac{(m+n)^x}{m} = c$$

Will man dahero wissen, wie viel man des Jahrs verzehren dörfe, daß ein Capital in gewisser Zeit aufgehe, welches bey Rechnungen von Leibrenthen gebraucht werden kan, darf man nur statt c setzen x und statt x die gegebene Zeit r, so komt folgende Aequation:

$$x\frac{(m+n)^r}{m^r} - \frac{an}{m}\frac{(m+n)^r}{m^r} = x$$

$$x(m+n)^r - \frac{an}{m}(m+n)^r = m^r x$$

$$x(m+n)^r - xm^r = \frac{an}{m}(m+n)^r$$

$$x = \frac{\frac{an}{m}(m+n)}{(m+n)^r - m^r}$$

oder weil $\frac{an}{m}$, der Zinß vom gegebenen Capital, den man v nennen kan $\frac{v(m=n)^r}{(m+n)^r - m_r}$

Der 2. Zusatz.

§. 238. So bey einer Fabrik Instrumenten in gewissen Jahren unbrauchbar werden, und folglich das darein gesteckte Capital aufgezehret wird, so gilt auch die Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)^r - m^r}$, um zu finden, wie viel da-

 von

von auf ein Jahr zu rechnen sey. Eben so läßt sich hieraus berechnen, welches vortheilhafter sey, ein gewisses Capital in etwas zu stecken, das nach gewissen Jahren unbrauchbar wird, oder solches zu miethen und einen jährlichen Zinß daraus zu geben. Beträgt die Formel §. 237. mehr, als der zu gebende Zinß, so ist das Miethen besser, und so auch umgewandt.

Der 3. Zusatz.

§. 239. Nimmt einer ein Capital auf, und gibt statt des Zinßes ein Gut zu benutzen (pactum antichreticum), welches mehr als den Zinß erträgt, so wird das Capital auch jährlich um so viel geringer, als der Ertrag des Guts den Zinß übersteiget, folglich muß auch jährlich solches weniger Zinß tragen. Wird nun der Ueberschuß des Ertrags über den Zinß b genennet, so kan nach obiger Formel (§. 235.)

$$x = \frac{L\left(\frac{na}{m} + b\right) - Lb}{L(m+n) - Lm}$$

die Zeit gefunden werden, wenn das Capital durch Benutzung des Guts abbezahlt wird.

Der 4. Zusatz.

§. 240. Will man wissen, wie gros das Capital seyn müsse, daß es in gegebenen Jahren aufgezehret werde, wenn man jährlich eine gewisse Summ damit zu bestreiten hat: so darf man nur in die Formel (§. 137.) an statt a setzen x, und statt x die gegebene Jahre r, also statt $\frac{c(m+n)^x}{m^x} - \frac{an}{m} \frac{(m+n)}{m^x} = c$

$$\frac{c(m+n)^r}{m^r} - \frac{xn}{m}\frac{(m+n)}{m^r} = c$$

$$c(m+n)^r - \frac{xn}{m}(m+n)^r = cm^r$$

$$c(m+n)^r - cm^r = \frac{xn}{m}(m+n)^r$$

$$\frac{c((m+n)^r - m^r)}{(m+n)^r} = \frac{xn}{m}$$

$$\frac{cm((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^r} = x$$

Dieses kan in dem Fall gebraucht werden, wenn ich auf ein Gut Geld aufnehme, und dagegen solches auf etliche Jahre zu benutzen gebe, um zu wissen, wie ein grosses Capital ich nehmen dörfe, damit ich nach Verfluß dieser Jahre das Gut wieder frey bekomme. Z. E. Das Gut ertrage 100 fl. ich wills auf 9 Jahre geben, wie viel darf ich darauf nehmen, daß ichs nach dieser Zeit wieder frey bekomme?

$c = 100$, $r = 9$, $m = 20$, $n = 1$, folglich $\frac{2000(21^9 - 20^9}{21^9} = x = 710$ fl. $45\frac{1}{2}$ kr.

Der 5. Zusatz.

§. 241. Soll mit dem, der ein Gut für ein geschossenes Capital zu nutzen bekommen, liquidirt werden, wie viel ihme nach einigen Jahren noch an dem Capital zu zahlen seye, wenn der Ertrag die Zinße übertroffen, so komts auf gleiche Rechnung an. Der Ueberschuß sey $= b$, das Capital $= a$, die Zahl der Jahre, $= r$, und der Zinß $= \frac{n}{m}$, so gehet

 1. Jahr

1. Jahr ab b

2. $\frac{b(m+n)}{m}$

3. $\frac{b(m+n)^2}{m^2}$

im letzten $\frac{b(m+n)^{r-1}}{m^{r-1}}$

wird diese Progreßion summirt und vom Capital abgezogen, so hat man das verlangte

$$\left(\frac{b(m+n)}{m^r} - b\right) : \frac{n}{m} = \frac{mb}{n}\frac{(m+n)^r}{m^r} - \frac{mb}{n}$$

also ist zu bezahlen $a + \frac{mb}{n} - \frac{mb(m+n)^r}{nm^{r-1}}$

Anmerkung.

§. 242. Vielleicht werden diejenige, die dem Buchstaben der Gesetze nachgehen, mit einigen bisher angebrachten Aufgaben nicht zufrieden seyn, weil Wucher auf Wucher, oder Zinß von Zinßen, gerechnet worden, welches nach denen Gesetzen nicht erlaubt, und also davor halten, dieses seyen unnütze Grillen, die man nirgends brauchen könnte. Allein es ist ein anders, ein Capital anlegen, und wenn der Schuldner den Zinß nicht zahlen kan, solchen zum Capital schlagen, und wieder ein anders in gewissen Fällen, um niemand unrecht zu thun, Zinß von Zinßen zu rechnen. Als wenn ich Cajo über 4 Jahre 1000 fl. zahlen solte, so würden mir innerhalb dieser Zeit diese 1000 fl. im ersten Jahr 50 fl. Zinß tragen. Diesen Zinß lasse ich nicht müßig liegen, er muß mir im zweyten Jahr 2 fl. 30 kr. tragen, und so weiter in den folgenden Jahren. Geschähe mir nicht da gros unrecht, wenn ich in der Rabbatrechnung nicht Zinß von Zinßen mit

mit berechnen dörfte? zumalen die Gesetze gar nicht davon, sondern von ausgelehnten Capitalien handeln. Und eben so ist es mit den übrigen Aufgaben; davon wir aber Kürze halben nichts gedenken wollen.

Die 80. Aufgabe.

§. 243. Eine Regel zu finden, wie hoch ein Capital in gewissen Jahren, wenn die Zinße jederzeit wieder zu Capital angelegt worden, steigen werde.

Auflösung.

Das Capital sey $= a$

der Zinß $= \frac{n}{m}$

die Jahre $= r$

Mit Verfluß des ersten Jahrs hat man $a + an : m = a(m+n) : m$. Siehet man dieses wieder als ein Capital an, so schließt man nach der Regel de Tri: a gibt $a(m+n) : m$, was gibt $a(m+n) : m$, welches gibt $a(m+n)^2 : m^2$ u. s. w. in dem dritten Jahr. Dahero komt für die Jahre $\frac{a\,(m+n)^r}{m^r}$

Die 81. Aufgabe.

§. 245. Einer gibt jährlich von seinem Vermögen eine gewisse Summe aus, erwirbt mit dem übrigen jährlich einen gewissen Theil davon, als $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{3}{5}$. rc. nach Verfluß gewisser Jahren hat er noch etlichemal so viel, als er Anfangs gehabt, wie gros war sein Vermögen?

Auflösung.

Er habe anfänglich gehabt $= x$

gibt jährlich aus $= c$

erwirbt mit dem Rest $= \frac{n}{m}$

die gegebene Jahre $= r$
wie vielmal das Vermögen vermehrt worden $= p$
gibt er gleich im Anfang des ersten Jahrs aus c, so hat er noch $x - c$, und mit Ende dieses Jahrs $x - c + n (x - c) : m$, das ist zu dem ganzen $x - c$, soll ein Bruch davon, nemlich $n (x - c) : m$, addiret werden, welches eben so viel, als ob $x - c$ mit $1 + n : m = (m + n) : m$ multiplicirt würde, welches also gibt $(x - c)(m + n) :$ $= (m + n) x : m - (m + n) c : m$. Zu Anfang des zweyten Jahrs gibt er wieder aus c, hat also noch $(m + n) x : m - (m + n) c : m - c$, dazu gewinnt er $n : m$ davon, welches, wie erst erwiesen worden, eben so viel, als ob es mit $(m + n) : m$ multiplicirt würde $=$
$x (m + n)^2 : m^2 - c (m + n)^2 : m^2 - c (m + n) : m$,
wird wieder c ausgegeben, so ists
$x (m + n)^2 : m^2 - c (m + n)^2 m^2 - c (m + n) : m - c$
wird $n : m$ davon wieder hinzu gethan, oder, wie erwiesen worden, mit $(m + n) : m$ multiplicirt, so ists $x (m + n)^3 :$ $m^3 - c (m + n)^3 : m^3 - c (m + n) : m^2 - c (m + n) : m$
woraus erhellet, daß endlich in den Jahren r sey
$x (m + n) : m - c (m + n)^r : m^r - c (m + n)^{r-1} :$ $m^{\ -1}\ c (m + n)^{\ -2}\ m^{r-2}$ ꝛc. $- c (m + n) : m = px$

$x (m + \ )\ : m - px = c ((m + n)\ : m + (m + n)^{r-1} :$ $m^{r-1} + (m + n)^{r-2} : m^{r-2}$ ꝛc. $(m + n) : m)$

wird

wird diese Progreßion summirt (§. 193.) so ist sie

$$\frac{((m+n)^{r+1} - (m+n)m^r)}{m^{r+1}} : \frac{n}{m} =$$

$$\frac{(m+n)^{r+1} - (m+n)m^r}{nm^r} =$$

$$\frac{(m+n)(m+n)^r - m^r}{mn^r}$$ folglich

$$\frac{c((m+n)(m+n)^r - m^r)}{nm^r} = x\frac{(m+n)^r}{m^r} - px$$

$$c((m+n)(m+n)^r - m^r) = nx(m+n)^r - nm^r px$$

$$\frac{c((m+n)(m+n)^r - m^r)}{n((m+n)^r - pm^r} = x.$$

Der 1. Zusatz.

§. 246. Wäre $p=1$, das ist, er hätte nach Verlauf dieser Jahre noch gerad so viel als von Anfang, so wäre

$$\frac{c(m+n)((m+n)^r - m^r)}{n((m+n)^r - m^r)} = x$$

$$\frac{c(m+n)}{n} = x$$

Weil nun hier r weggehet, so erhellet, daß er nach Verfluß eines jeden Jahrs eben so viel haben werde, als er Anfangs gehabt.

Der 2. Zusatz.

§. 247. Wäre $p=0$, so würde nach den Jahren r das Capital verzehrt, und vorige Aequation würde

$$\frac{c(m+n)((m+n)^r - m^r)}{n((m+n)^r - om\ )} = x$$

$$\frac{c((m+n)^r - m^r)}{n(m+n) - 1} = x$$

Der 3. Zusatz.

§. 248. Oben §. 240. ist auch eine Formel gefunden worden, wie gros das Capital seyn müsse, so in gewisser Zeit bey gewissen Ausgaben aufgehe; allein solches setzt zum voraus, die Ausgabe werde erst mit Ende jeden Jahrs bestritten, diese aber gleich bey dem Anfang des Jahrs.

Der 4. Zusatz.

§. 249. Die Formel §. 240. war

$$\frac{cm((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^r}$$

diese ist $\frac{c((m+n)^r - m^r)}{n(m+n)^r - 1}$

also verhalten sie sich zu einander wie $\frac{m}{m+n} : 1$ oder $m : m+n$ also wird das Capital, davon man erst die Ausgab mit End des Jahrs bestreiten, kleiner seyn, als das, davon man gleich im Anfang ausgibt.

Die 82. Aufgabe.

§. 250. Es hat einer ein Capital, damit er jährlich so viel erwirbt, daß er allzeit mit Schluß des Jahrs etlichmal, z. E. zweymal, dreymal, &c. so viel bekomt, als er im Anfang desselben gehabt;

gibt

gibt aber mit Schluß des ersten Jahrs eine gewisse Summe aus, im zweyten Jahr zweymal so viel, im dritten dreymal so viel, ꝛc. Nach gewissen Jahren zehret er sich auf, wie gros war sein Capital?

Auflösung.

Das Capital sey $= x$
wie vielmal er sein Geld vermehrt $= m$
die Anzahl der Jahre $= n$
gibt das erste Jahr aus $= a$

So hat er mit Schluß des

1. Jahrs $mx - a$
2. $m^2 x - ma - 2a$
3. $m^3 x - m^2 a - 2ma - 3a$
4. $m^4 x - m^3 a - 2m^2 a - 3ma - 4a$
5. $m^5 x - m^4 a - 2m^3 a - 3m^2 a - 4ma - 5a$

u. s. w.

Hieraus erhellet, daß der Exponent von m, wo es mit x multiplicirt ist, sey $= n$, und wo eben dieses m mit a multiplicirt ist, sey dessen Exponent im ersten Glied $= n - 1$, und in den folgenden Gliedern immer um 1 weniger werde, das letzte Glied aber sey $= na = nam^0$.
Es ist also

$$m^n x - am^{n-1} - 2am^{n-2} - 3am^{n-3} \text{ ꝛc.} - nam^0 = 0$$

$$\frac{m^n x}{a} = m^{n-1} + 2m^{n-2} + 3m^{n-3} \text{ ꝛc.} + nm^0$$

Hier ist eine geometrische Progreßion, die aus anderen Progreßionen zusammen gesetzt ist. Wir wollen sie zerlegen, und um der Deutlichkeit willen, indessen $n = 5$ gelten lassen, so ist

$$\frac{m^5 x}{a} = m^4 + m^3 + m^2 + m^1 + m^0$$
$$m^3 + m^2 + m^1 + m^0$$
$$m^2 + m^1 + m^0$$
$$m^1 + m^0$$
$$+ m^0$$

Hieraus ist klar, daß eben so viel Progreßionen heraus kommen, als Jahre gegeben sind, bey deren jeden das letzte Glied $m^0 = 1$ (§. 60.) und immer eine ein Glied weniger hat, als die vorhergehende, bis die letzte nur das einige Glied $m^0 = 1$ hat. Wir wollen sie summiren (§. 193.)

$$\frac{m^n - 1}{m - 1} + \frac{m^{n-1} - 1}{m - 1} + \frac{m^{n-2} - 1}{m - 1} \text{ ꝛc. } + \frac{m^1 - 1}{m - 1} + 1$$

folglich ist

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^n - 1 + m^{n-1} - 1 + m^{n-2} - 1 \text{ ꝛc. } + m^2 - 1}{m - 1} + 1$$

So viel es Progreßionen gegeben, so vielmal ist auch -1 in dieser Aequation, ausser, daß die letzte m^0 nicht mit summiret worden, daher ist das -1 so vielmal zu nehmen, als $n - 1$: dahero ist

$$\frac{m^n x}{a} = \frac{m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ ꝛc. } + m^2 - n + 1}{m - 1} + 1$$

$$(m - 1)\frac{m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ ꝛc. } + m^2 - n + 1$$
$$(+ m - 1$$

$$(m - 1)\frac{m^n x}{a} = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ ꝛc. } + m^2 + m - n$$

$$(m - 1)\frac{m^n x}{a} + n = m^n + m^{n-1} + m^{n-2} \text{ ꝛc. } + m^2 + m$$

Wird auch diese Progreßion summirt (§. 193.) so ist

(m—

$$\frac{(m-1)\, m^{n} x + n}{a} = \frac{m^{n+1} - m}{m-1}$$

$$\frac{m^{n} x}{a} = \frac{m^{n+1} - m}{(m-1)^2} - \frac{n}{m-1}$$

$$= \frac{\frac{m^{n+1}}{(m-1)} - \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{n}{m-1}}{m}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{(m-1)^2} - \frac{m}{m^{n}(m-1)^2} - \frac{n}{m\,(m-1)}$$

$$x = \frac{a}{(m-1)^2}\left(m - \frac{m + n\,(m-1)}{m^{n}}\right)$$

Es sey $a = 8$, $m = 2$, $n = 3$, so ist $x =$

$$\frac{8}{(2-1)^2}\left(2 - \frac{2+4(2-1)}{2^3}\right) = 8\left(2 - \frac{2+3}{8}\right) =$$

$8(2 - \frac{5}{8}) = 16 - 5 = 11.$

Die 83. Aufgabe.

§. 151. Es legt einer verschiedene Jahre nach einander ein Capital an, und schlägt allemal die Zinß zum Capital. Wie viel wird er haben nach gewissen Jahren?

Auflösung.

Das Capital sey $= a$, der Zinß $= \frac{n}{m}$, die Jahre r, so wird er haben nach §. 343.

a(

$$\frac{a(m+n)}{m^r} + \frac{a(m+n)^{r-1}}{m^{r-1}} + \frac{a(m+n)^{r-2}}{m^{r-2}} \text{ꝛc.} + a$$

die Summe dieser Progreßion ist (§. 193.)

$$\left(\frac{a(m+n)^{r+1}}{m^{r+1}} - a\right) : \frac{n}{m} = \frac{a(m+n)^{r+1}}{nm^r} - \frac{am}{n}$$

Die 1. Anmerkung.

§. 252. Die Formeln, in welchen Dignitäten vorkommen, sind, besonders wenn sie von hohem Grad sind, ungemein beschwerlich in Zahlen zu rechnen, wegen dem vielen Multipliciren. Nun kommen uns zwar die Logarithmi zu statten, allein in Formeln, darinnen addirte und subtrahirte Grössen vorkommen, lassen sie sich nicht wohl anwenden, als §. 237. in der Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)-m^r}$ kan man nicht den Logarithmum von $v(m+n)^r = Lv + rL(m+n)$ haben, aber nicht von $(m+n)^r - m^v$; denn er kan nicht $rL(m+n) - rLm$ seyn, weil die Subtraction der Logarithmen eine vorhin gewesene Division anzeiget (§. 209.) Wir wollen aber der Sache so helfen, daß wir mit Zusetzung des Buchstabens N, welcher anzeiget, daß die Zahl verstanden werde, deren Logarithmus da ist, (§. 212) die Sache erleichtern. Als vorstehende Formel $\frac{v(m+n)^r}{(m+n)-m^r}$ gibt folgende: $\frac{N(Lv+rL(m+n))}{NrL(m+n)--NrLm}$, welche so viel heißt, 1) man solle den Logarithmum von v und den von $m+n$, mit r multipli-

tiplicirt, zusammen addiren, und die dazu gehörige Zahl nehmen, 2) eben so von der Zahl, die zu dem Logarithmo $rL(m+n)$ gehört, die, so zu dem Logarithmo rLm gehört, abziehen, und 3) das letztere in das erstere dividiren. Nun wird es leicht seyn, die Formeln §. 221. 222. 226. 227. 230. 240. 241. mit N und L zu erleichtern.

Die 2. Anmerkung.

§. 253. Mehrentheils kommen Logarithmi heraus, die eine so grosse Kennzahl oder Characteristicam haben, dergleichen in den Tabellen nicht zu finden; als §. 240. soll der Logarithmus von 21 bis 9 multiplicirt werden, gibt 11. 8999737. Nun könnten wir wohl als bekannt zum voraus setzen, wie die Zahl, so zu diesem Logarithmo gehöret, zu finden! weilen es aber einem Anfänger so geläuffig nicht seyn mögte, wollen wir kürzlich zeigen, wie damit umzugehen. Wäre der Logarithmus 3.8999737. denn so hoch bis auf die Kennzahl 3 findet man ihn in den gemeinen Tabellen, und würde der Logarithmus 8.0000000 addirt, so käme der Logarithmus 11.8999737 heraus; nun aber ist die Zahl zu dem Logarithmo 8.0000000 gehörig 100000000, darum wäre die Zahl, die zu dem Logarithmo 3.8999737 gehört, mit 100000000 zu multipliciren. Nun aber findet man diesen Logarithmum nicht, sondern 3.8999299 und 3.8999846, zu jenem gehört 7942, zu diesem 7943 wird zu jeden Logarithmi characteristica 8 addirt, so werden die Zahlen mit 100000000 multiplicirt, daß jene 794200000000, diese aber 794300000000 wird. Ziehet man derowegen 11.8999299 von 11.8999846 ab, so beträgt der Unterschied des Logarithmi ($=547$) in der Zahl 100000000, der Unterschied aber von 11.8999737 und 11.8999299 aber ist 438, daher spricht man nach der Regel Detri.

547 gibt 10000000, was gibt 438? gibt 80073126, welches zu 7942000000000 addirt, die zu dem Logarithmo 11.8999737 gehörige Zahl gibt. Und auf diese Art werden alle dergleichen Logarithmi behandelt.

Die 11. Erklärung.

§. 254. Wenn etliche Glieder einer arithmetischen Progreßion, die von 1 anfängt, addirt werden, so nennt man solche Summe eine Polygonalzahl.

Die 12. Erklärung.

§. 255. Ist die Differenz der Glieder einer solchen Progreßion 1, so heißt es eine Trigonalzahl; ist sie 2, eine Quadratzahl; ist sie 3, eine Pentagonalzahl, u. s. w.

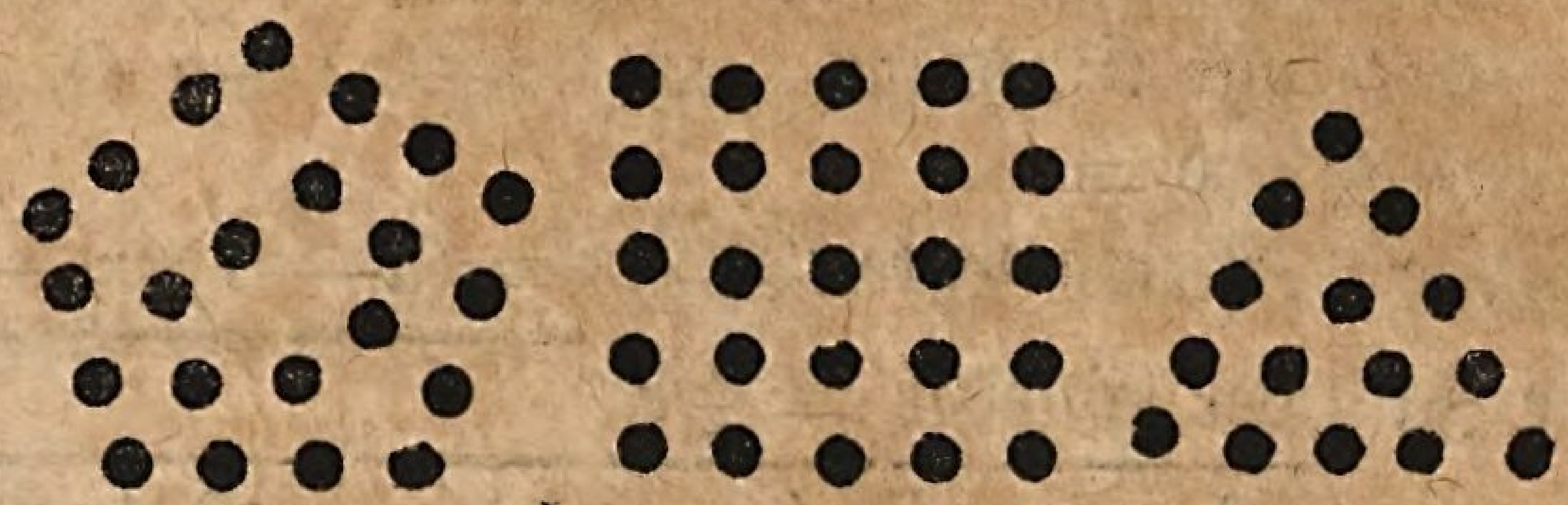
Anmerkung.

§. 256. Es sind demnach

Arithm. Progr.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Trigonal-Zahl.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.
Arithm. Progr.	1.	3.	5.	7,	9.	11.	13.	15.	17.
Quadrat-Zahl.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.
Arithm. Progr.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.	25.
Pentagonal-Zahl	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92.	117.ꝛc.

Sie haben aber den Namen von den regulären Vielecken, in welche sich die Zahlen, wenn ihre Einheiten als Puncten oder Kugeln angesehen werden, versetzen lassen, daß auf eine Seite so viel Puncten kommen, als Glieder in einer Progreßion summiret worden, als:

Der



Der 1. Zusatz.

§. 256. Hieraus ist klar, daß der zu summirenden Progreßion Differenz allezeit um 2 weniger seye, als die daher entstehende Figur Winkel hat, wenn also die Winkelzahl $= n$, so ist die Differenz $= n - 2$.

Der 2. Zusatz.

§. 357. Eben so klar ist auch, daß, so viel Glieder summirt worden, so viel kommen auch Puncten auf eine Seite der Figur.

Der 3. Zusatz.

§. 258. Um deswillen kann die Zahl der summirenden Glieder gar füglich die Seitenzahl, und die um 2 vermehrte Differenz der Glieder die Winkelzahl genennet werden.

Die 83. Aufgabe.

§. 259. Aus der gegebenen Seiten- und Winkelzahl die Polygonalzahl selbst zu finden.

Auflösung

Die Seitenzahl sey $= a =$ die Zahl der Glieder (§. 257.)

die

die Winkelzahl $= n$, so ist die Differenz $= n - 2$ (§. 256.)
daher das letzte Glied $(a - 1)(n - 2) + 1$ (§. 184.)
das erste Glied $= 1$
Summe d. ersten u. letzten Glieds $= (a - 1)(n - 2) + 2$
halbe Zahl der Glieder $= \frac{1}{2} a$

Polygonazahl $= x = \frac{1}{2} a ((a - 1)(n - 2) + 2)$

$$= \frac{a^2 n}{2} - \frac{an}{2} - a^2 + 2a$$

$$= \frac{(n - 2) a^2 - (n - 4) a}{2}$$

Es sey $a = 8$, $n = 5$, so ist $x = ((5 - 2) 64 - (5 - 4) 8) : 2 = (3 . 64 - 1 . 8) : 2 = (192 - 8) : 2 = 184 : 2 = 92$.

Der 1. Zusatz.

§. 260. Es ist demnach die

Trigonalzahl $= \frac{a^2 + a}{2}$

Quadratzahl $= \frac{2a^2 + 0}{2} = a^2$

Pentag. Z. $= \frac{3a^2 - a}{2}$

Hexagon. Z. $= \frac{4a^2 - 2a}{2} = 2a^2 - a = a(2a - 1)$

Heptagon. Z. $= \frac{5a^2 - 3a}{2}$ rc.

Woraus die Regel, nach welcher die Polygonalzahlen gefunden werden, von selbsten in die Augen fället,

Der

Der 2. Zusatz.

§. 261. Man setze die Seitenzahl $= x$, die Polygonalzahl $= p$, so ist (§. 258.)

$$p = \frac{(n-2)x^2 - (n-4)x}{2}$$

$$2p = x^2(n-2) - (n-4)x$$

$$\frac{2p}{n-2} = x^2 - \frac{(n-4)x}{n-2}$$

Es sey $\frac{n-4}{n-2} = m$, so ist

$$\frac{n-4}{2n-4} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 16n + 16} = \frac{m^2}{4}$$ dahero

$$\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 16n + 16} = x^2 - mx + \frac{m^2}{4}$$

$$\sqrt{\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2 - 8n + 16}{4n^2 - 16n + 16}} = x - \frac{m}{2}$$

$$\frac{n-4}{2n-4} + \sqrt{\frac{2p}{n-2} + \frac{n^2 - 8n + 16}{4n^4 - 16n + 16}} = x$$

Werden die Brüche unter dem Wurzelzeichen zu einer-

ley Benennung gebracht, wenn nämlich $\frac{2p}{n-2}$ mi‑

$4n-8$ multiplic. wird, so komt $\sqrt{\frac{8np-16p+n^2-8n+16}{4n^2-16n+16}}$

$$= \frac{\sqrt{8p(n-2)+(n-4)^2}}{2n-4}$$ folglich

$$\frac{n-4+\sqrt{8p(n-2)+(n-4)^2}}{2n-4} = +$$

Die 3. Zusatz.

§. 262. Daher ist
die Seit der Trigon. Z. $= \frac{-1+\sqrt{8p+1}}{2}$

der Quadr. Z. $= \frac{0+\sqrt{16p+0}}{4} = \sqrt{p}$

der Pentag: Z. $= \frac{1+\sqrt{24p+1}}{6}$

der Hexag. Z. $= \frac{1+\sqrt{32p+4}}{8}$

der Heptag. Z. $= \frac{3+\sqrt{40p+9}}{10}$

wel‑

welches so wol die Art die Seite zu finden, deutlich vor Augen leget, als auch zeiget, wie zu finden, ob eine gegebene Zahl unter die Polygonalzahlen gehöre oder nicht, wann sie nemlich in denen Formeln nach und nach in die Stelle des p gesetzt wird, und sodann Quadratwurzeln ausgezogen werden können.

Der 4. Zusatz.

§. 263. Es sey die Winkelzahl $= x$, so ist

$$p = \frac{a}{2}((a-1)(x-2)+2)$$

$$\frac{2p}{a} = (a-1)(x-2)+2$$

$$\frac{2p}{a} - 2 = (a-1))x-2)$$

$$\frac{2p}{a(a-1)} - \frac{2}{a-1} = x-2$$

$$\frac{2p}{a(a-1)} - \frac{2}{a-1} + 2 = x$$

$$\frac{2(p-a)}{a(a-1)} + 2 = x$$

Es sey $p = 148$, $a = 8$, so ist $x = \frac{2(148-8)}{8(8-1)} + 2$

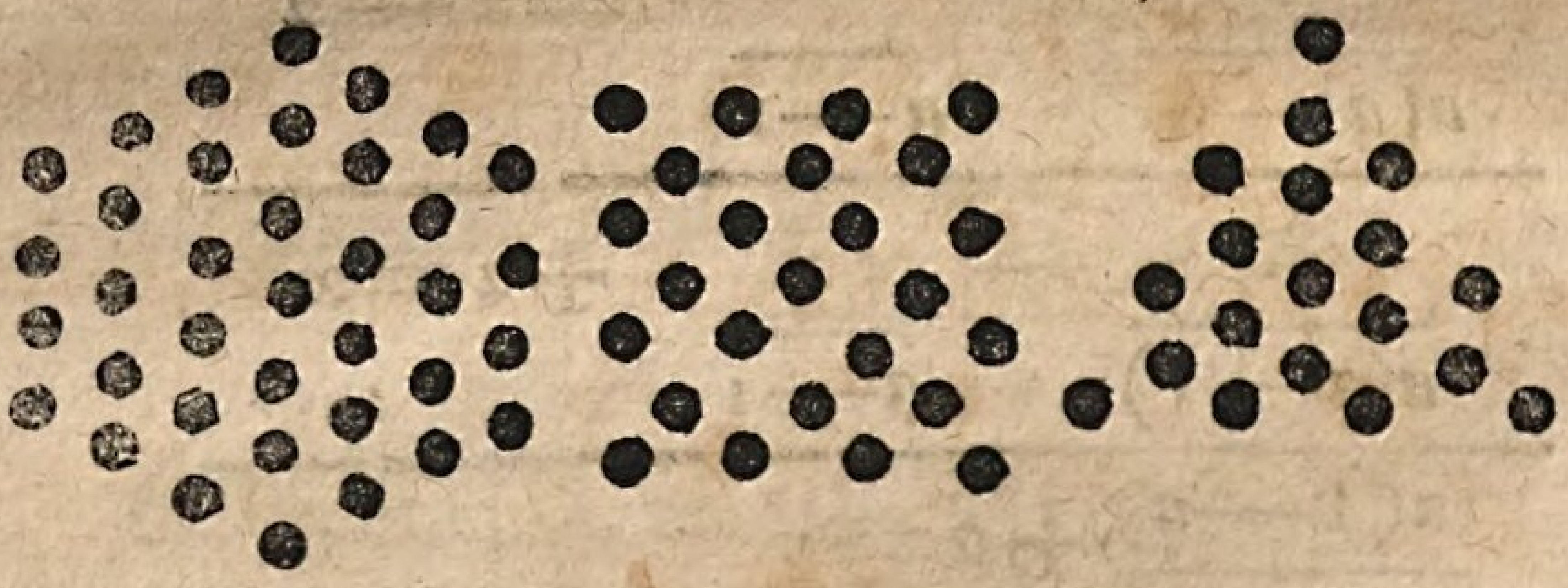
$$= \frac{2.140}{8.7} + 2 = \frac{280}{56} + 2 = 5 + 2 = 7.$$

Die 13. Erklärung.

§. 264. Wenn ein Punct von 3. 4. 5. 6. ꝛc. Puncten in Gestalt eines regulairen Vieleckes umgeben wird, und dieses Vieleck wieder von einem andern u. s. w. daß immer des äusseren Seite einen Punct mehr habe als des inneren: so wird die Zahl solcher Puncten eine volle Polygonalzahl oder eine Polygonalzahl mit dem Centro genennet. Und zwar insbesondere eine Trigonalzahl, wenn 3; eine Quadratzahl, wenn 4 ꝛc. Puncten das Centrum umgeben.

Die 1. Anmerkung.

§. 265. Die Ursache dieser Benennung ist aus nachstehenden Figuren abzunehmen.



Die 2. Anmerkung.

§. 266. Wenn diese Puncten so wol bey den vollen als gemeinen Polygonalzahlen Kuglen von gleichem Diameter sind, die einander berühren: so werden sie nirgends accurat auf einander passen, als bey denen gemeinen Polygonalzahlen in der Trigonal- und Quadratzahl; bey den vollen aber nur in den Hexagonal- und Quadratzahlen, weilen die

die Diametri der zusammenstossenden Kugeln sonst nirgends gleichseitige Triangel, Quadrate oder regulaire Sechsecke ausmachen, als welche Figuren allein in einer ebenen Fläche auf einander passen, welches in der Geometrie erwiesen wird. Es zeiget dieses auch der blosse Augenschein.

Der 1. Zusatz.

§. 267. Wenn in der vollen Polygonalzahl das Centrum nicht mit gezehlet wird, so enthält die erste Reihe so viel Puncten, als die Figur Seiten hat, davon die Zahl den Namen hat, die andere Reihe doppelt, die dritte dreymal so viel ꝛc. Daher ist diese Polygonalzahl eine arithmetische Progreßion, deren ersteres Glied die Winkelzahl ist und die Differenz ebenfals die Winkelzahl.

Der 2. Zusatz.

§. 268. Auf der ersten Vielecksseite von diesen Polygonalzahlen sind 2 Puncten, auf dem zweyten 3, ꝛc. dahero ist die Seitenzahl jederzeit um 1 mehr als die Zahl der Glieder, wenn daher die Seitenzahl $= n$, so ist die Zahl der Glieder von der Progreßion $= n - 1$.

Der 3. Zusatz.

§. 269. Wenn man also diese Progreßion (§. 267. 268.) summiret und 1 addiret, hat man die volle Polygonalzahl.

Die 84. Aufgabe.

§ 270. Aus der gegebenen Zahl der Winkel und Seite die Polygonalzahl mit dem Centro zu finden.

Auflösung.

Es sey die Zahl der Winkel $= a$
Die Zahl der Seite $= n$
So ist das erste Glied $= a$
Die Differenz $= a$ (§. 267.)
Die Zahl der Glieder $= n - 1$ (§. 268.)
Das letzte Glied $= (n-2)\,a + a = na - a$
Summe des ersten und letzten $= na$
Summe der Progreßion $= na\frac{(n-1)}{2}$ (§. 185.)

folglich
Die Polygonalzahl $x = \frac{na}{2}(n-1) + 1$ (§. 269.)

Der 1. Zusatz.

§. 271. Hieraus folgt, daß sey
Trigonalzahl $= \frac{3(n-1)}{2}n + 1$

Quadratzahl $= \frac{4(n-1)}{2}n + 1 = 2(n-1)n + 1$

Pentagonalzahl $= \frac{5(n-1)}{2}n + 1$

Hexagonalzahl $= \frac{6(n-1)}{2}n + 1$ ꝛc.

Der 2. Zusatz.

§. 272. Man setze die Polygonalzahl $= p$, die Winkelzahl $= x$, so ist

$p =$

$$p = xn\frac{(n-1)}{2} + 1$$

$$2p = xn(n-1) + 2$$

$$2p - 2 = xn(n-1)$$

$$\frac{2(p-1)}{n(n-1)} = x$$

Der 3. Zusatz.

§. 273. Man setze $n = x$, so ist

$$p = ax\frac{(x-1)}{2} + 1$$

$$p - 1 = ax\frac{(x-1)}{2}$$

$$2\frac{(p-1)}{a} = x^2 - x$$

$$2\frac{(p-1)}{a} + \tfrac{1}{4} = x^2 - x + \tfrac{1}{4}$$

$$\sqrt{2\frac{p-1)}{a} + \tfrac{1}{4}} = x - \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{1}{2} + \sqrt{2(p-1) : a + \tfrac{1}{4}} = x$$

Der 4. Zusatz.

§. 274. Weil die Formel $\tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{2p-2}{a} + \tfrac{1}{4}}$ $= \tfrac{1}{2} + \sqrt{\frac{8p-8+1}{4a}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-8+a}{a}}$; so ist die

Seite der

Trig. Z. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-5}{3}}$

Quad. Z. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-4}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2p-1}$

Pentag. Z. $= \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{8p-3}{5}}$

Hexag. Z. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-2}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p-1}{3}}$

Heptagon. Z. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-1}{7}}$

Octog. Z. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p-0}{8}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p}$

Enneag. Z. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p+1}{9}}$

Decag. Z. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8p+2}{10}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p+1}{5}}$

Der 5. Zusatz.

§. 275. Wenn man demnach von einer Zahl wissen will, ob sie eine von denen Polygonahlen sey: so darf man sie nur nach und nach in denen Formeln (§. 274.) in die Stelle des p setzen, und sehen, ob sich die Wurzel ausziehen lasse. Kan es geschehen, so gehöret sie darunter; wo aber nicht, ist sie auch keine Polygonal-

nalzahl. Z. E. 61. in der Trigonalformel, da unter dem Wurzelzeichen stehet $\frac{8p - 5}{3}$, so käme $\frac{8.61 - 5}{3}$ $= \frac{483}{3} = 161$, welche Zahl irrational; wird aber 61 in die Hexagonalformel gesetzt, so ist $\frac{4.61 - 1}{3} =$ $\frac{243}{3} = 81$, welches rational ist Daher ist 61 zwar keine Trigonal- wohl aber eine Hexagonalzahl.

Die 85. Aufgabe.

§. 276. Die Summe von Quadraten, Cubiczahlen, zu finden, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung der Zahlen fortgehen.

Auflösung.

Es sey diejenige Zahl, wie weit von eins an die Summirung geschehen solle $= n$

Die verlangte Summe von diesen Zahlen werde angezeigt mit Vorsetzung des Buchstabens f.

So ist fn^0 die Summe von so viel Einsern, als n anzeiget, weil $n^0 = 1$ (§. 60.)

Sn^1 ist die Summe von den natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung fortgezehlet bis auf n.

Sn^2 ist die Summe von den Quadraten, deren Wurzeln in natürlicher Ordnung fortgehen.

Sn^3 die Summe von Cubiczahlen, deren Wurzeln auch in natürlicher Ordnung bis auf n fortgehen. Und so weiter Sn^4, fn^5, fn^6, ꝛc.

Als es sey $n = 5$, so wäre

$$Sn^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$
$$Sn^1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
$$Sn^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$
$$Sn^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$$

Man nehme eine Zahl weiter als n, so ist sie $n+1$, und die Summen werden seyn, wie vorhin $f(n+1)^0$, $f(n+1)^1$, $f(n+1)^2$, $f(n+1)^3$, $f(n+1)^4$ ꝛc. Wenn man daher die ersteren Summen abziehet, so bleiben jederzeit die letzten Glieder von den letzten Reihen übrig, als: $f(n+1)^0 - fn^0 = n^0$, $f(n+1)^1 - fn^1 = (n+1)^1$, $f(n+1)^2$, $- - - fn^2 = (n+1)^2$, $S(n+1)^3 - fn^3 = (n+1)^3$ ꝛc. als wenn $n = 5$, so ist $(n+1) = 6$, und z. E. $S(n+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$,
$Sn^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$

$$S(n+1)^2 - fn^2 = 36 = (n+1)^2$$

Nun findet man im 187 §. wenn $a = 1 = d$ gesetzt wird, die Summe der ersten n natürliche Zahlen oder $fn = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Diese Summe ist durch die erste und zweyte Potenz von n gegeben, jede mit einem Coefficienten multiplicirt, der einerley bleibt, n mag sich ändern, wie es will; es ist nemlich auf eben die Art $f(n+1) = \frac{1}{2}.(n+1)^2 + \frac{1}{2}.(n+1)$

Weil nun hier die Summe der ersten Potenzen das Quadrat von n enthält: so kann man wenigstens als eine Muthmassung ansehen, die Summe der Quadraten werde dem Würfel von n enthalten, und etwa folgende Gestalt haben:

Sn^2

$$Sn^2 = A.n^3 + B.n^2 + C.n$$

wo A, B, C Coefficienten bedeuten, müssen die, wie die vorigen $\frac{1}{2}$, einerley bleiben, wenn sich gleich n änderte. Es wäre nemlich auf eben die Art:

$$S(n+1)^2 = A(n+1)^3 + B.(n+1)^2 + C.(n+1)$$

Ob nun diese Muthmassung richtig ist oder nicht, liesse sich prüfen, wenn man die Coefficienten etwa bestimmen könnte. Das mögte folgendergestalt angehen: Wenn man $(n+1)^3$, $(n+1)^2$, $n+1$ wirklich berechnet und einzeln mit den Coefficienten multiplicirt, so ist

$$\begin{aligned} A.(n+1)^3 &= An^3 + 3An^2 + 3An + A \\ B.(n+1)^2 &= \quad\quad\;\; + Bn^2 + 2Bn + B \\ C.(n+1) &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; + Cn + C \end{aligned}$$

Dieses zusammen ist, vermöge der Voraussetzung, $ſ(n+1)^2$. Man ziehe davon ab

$$Sn^2 = An^3 + Bn^2 + Cn$$

so bleibt

$$\begin{aligned} ſ(n+1)^2 - ſn^2 = 3An^2 &+ 3An + A \\ &+ 2Bn + B \\ &\quad\quad\;\; + C \end{aligned}$$

Nun ist aber $ſ(n+1)^2 - ſn^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. folglich

$$n^2 + 2n + 1 = 3An^2 + \left.\begin{matrix} 3A \\ +2B \end{matrix}\right\} n + \begin{matrix} A \\ +B \\ +C \end{matrix}$$

Hier muß das einerley seyn, was auf beyden Seiten in einerley Potenz von n multiplicirt ist, also ist

I) $1 = 3A$; $A = \frac{1}{3}$; II) $2 = 3A + 2B = 1 + 2B$; oder $1 = 2B$; $B = \frac{1}{2}$; III) $1 = A + B + C = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + C = \frac{5}{6} + C$ oder $\frac{1}{6} = C$

daher $ſn^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

wenn $n = 5$; so ist $ſn^2 = \frac{125}{3} + \frac{25}{2} + \frac{5}{6}$

$= 41\frac{2}{3} + 12\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 53 + \frac{12}{6} = 55$

Nach

Nach diesen beyden Beyspielen der Summen der ersten und zweyten Potenzen wird man also wohl für die Summe der Würfel, folgende Formel muthmassen.

$$Sn^3 = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn$$ daher

$$S(n+1)^3 = A.(n+1)^4 + B.(n+1)^3 + C(n+1)^2 + D(n+1)$$

$$= An^4 + 4An^3 + 6An^2 + 4An + A$$
$$+ Bn^3 + 3Bn^2 + 3Bn + B$$
$$+ Cn^2 + 2Cn + C$$
$$+ Dn + D$$

Weil nun $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ so ist dieser Würfel wirklich berechnet.

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 4An^3 + \left.\begin{matrix}6A\\+3B\end{matrix}\right] n^2 + \left.\begin{matrix}4A\\+3B\\+2C\end{matrix}\right\} n + \begin{matrix}A\\+B\\+C\\+D\end{matrix}$$

daher nach eben der Art zu schliessen, wie bey den Quadraten:

I) $1 = 4A$; $A = \frac{1}{4}$; II) $3 = 6A + 3B = \frac{6}{4} + 3B = \frac{3}{2} + 3B$ oder $1 = \frac{1}{2} + B$; $B = \frac{1}{2}$; III) $3 = 4A + 3B + 2C = 1 + \frac{3}{2} + 2C$ oder $\frac{1}{2} = 2C$; $C = \frac{1}{4}$; IIII) $1 = A + B + C + D$ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + D = 1 + D$ also $D = 0$ und $\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$

Für $n = 5$ ist diese Summe:

$$\frac{625}{4} + \frac{125}{2} + \frac{25}{4} = \frac{650}{4} + \frac{125}{3} = 162\tfrac{1}{2} + 62\tfrac{1}{2}$$
$$= 225.$$

Der 1. Zusatz.

§. 277. Diese Summen lassen sich also dergestalt angeben:

Sn^0

$$Sn^0 = n$$
$$\int n^1 = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n = \tfrac{1}{2}n.(n+1)$$
$$\int n^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n = \tfrac{1}{6}n.(n+1).(2n+1)$$
$$\int n^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 = \tfrac{1}{4}n^2.(n+1)^2$$

So kann man Formeln für die Summen höherer Potenzen finden; jede Formel enthält die Potenzen von n auf einen Grad höher, als die Potenzen steigen, die man summirt.

Der 2. Zusatz.

§. 278. Wenn 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4 ꝛc. multiplicirt wird: so kann solche Reihe Zahlen nach dieser Art summirt werden.

1. 2	=	2	=	1. (1+1)	=	1+1	
2. 3	=	6	=	2. (2+1)	=	4+2	
3. 4	=	12	=	3. (3+1)	=	9+3	
4. 5	=	20	=	4. (4+1)	=	16+4	
5. 6	=	30	=	5. (5+1)	=	25+5	
6. 7	=	42	=	6. (6+1)	=	36+6	
7. 8	=	56 ꝛc.	=	7. (7+1)	=	49+7 ꝛc.	
		168					

Nennt man nun die letzte n: so ist ihre Summe (§. 276.) $= \int n^2 + \int n^1 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 277.) $= \frac{1}{3}n^3 + n^2 + \frac{2}{3}n = \frac{1}{3}n(n+2)(n+1)$. Es sey $n=7$, so ist die Summe $= \frac{7}{3}(7+2)(7+1) = \frac{7}{3}.72 = 168$.

Die 14. Erklärung.

§. 279. Pyramidalzahlen sind, die entstehen, wenn die auf einander folgende Polygonalzahlen summiret werden.

Der

Der 1. Zusatz.

§. 280. Sie entstehen also aus den Polygonalzahlen, wie diese aus den arithmetischen Progreßionen.

Als nach §. 255. waren

Trigonalzahlen	1.	3.	6.	10.	15.	21.
Pyramidalzahlen	1.	4.	10.	20.	35.	56.
Quadratzahlen	1.	4.	9.	16.	25.	36.
Pyramidalzahlen	1.	5.	14.	30.	55.	91. ꝛc.

Der 2. Zusatz.

§. 281. Um deswillen werden die Pyramidalzahlen auch eingetheilt in Trigonal- Quadrat- Pentagonal- ꝛc. Pyramidalzahlen.

Der 3. Zusatz.

§. 282. Wenn also die Polygonalzahlen nach §. 276. summirt werden, so hat man die Pyramidalzahlen gefunden.

Anmerkung.

§. 283. Man wird sich leicht vorstellen können, woher die Pyramidalzahlen ihren Namen haben; denn wenn über einem Viereck, in welchem die Polygonalzahlen versetzt worden, (§. 256. 265.) ein anderes gesetzt wird, dessen Seite um 1 weniger, und so weiter bis zu oberst 1 komt, so stellen diese Puncten eine Pyramide vor. Man pflegt die Stuckkugeln in denen Zeughäusern so auf einander zu setzen. Wir werden also hieraus lernen, wie leicht zu berechnen sey, wie viel Kugeln in einem solchen Haufen seyen. Man wird aber leicht begreiffen, daß dergleichen

Pyramiden von Kugeln nicht können aufgesetzt werden, wo die Kugeln in den Polygonalzahlen nicht auf einander passen. (§. 266.)

Der 4. Zusatz.

§. 284. Weilen es gemeine und volle Polygonalzahlen gibt, (§. 254. 264.) so gibt es auch gemeine und volle Pyramidalzahlen.

Die 86. Aufgabe.

§. 285. **Aus der gegebenen Seiten und Winkelzahl die gemeine Pyramidalzal zu finden.**

Auflösung.

Es sey die Zahl der Winkel $= a$
der Seite $= n$
so ist die Polygonalzahl $= \frac{(a-2)n^2 - (a-4)n}{2}$
(§. 259.)

Man darf also nur diese Zahl summiren (§. 276. 277.) weilen aber a, als die Zahl der Winkel, unveränderlich, folglich nicht summirt werden kann, so wird nur n summirt

$$\frac{(a-2)\int n^2 - (a-4)\int n^1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(a-2)\int n^2 - \tfrac{1}{2}(a-4)\int n^1$$

$$= \tfrac{1}{2}(a-2)(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n) - \tfrac{1}{2}(a-4)\tfrac{1}{2}(n^2(+n)\text{(§. 277.)}$$

$$= \tfrac{1}{6}an^3 + \tfrac{1}{4}an^2 + \tfrac{1}{12}an - \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n - \tfrac{1}{4}an^2 - \tfrac{1}{4}an + (n^2 + n$$

$$= \tfrac{1}{6}an^3 - \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{6}an + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{5}{6}n$$

$$= \frac{an^3 - 2n^3 - an + 5n + 3n^2}{6}$$

=

$$=\frac{(a-2)n^3-(a-5)n+3n^2}{6}$$

$$=\frac{(a-2)n^3+n(3n-a+5)}{6}$$

Der 1. Zusatz.

§. 286. Dahero sind Pyramidalzahlen, und zwar

Trigonal $=\frac{n^3+n(3n+2)2)}{6}=$

Quadrat. $=\frac{2n^3+n(3n+1)}{6}$

Pentag. $=\frac{3n^3+n(3n+0)}{6}=\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{2}n$

Hexagon. $=\frac{4n^3+n(3n-1)}{6}$

Heptagon. $=\frac{5n^3+n(3n-2)}{6}$

Octogon. $=\frac{6n^3+n(3n-3)}{6}=n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ &c.

Der 2. Zusatz.

§. 287. Hieraus lassen sich dann Generalregeln für alle Pyramidalzahlen formiren.

1.) Die Cubiczahl der Seiten wird mit der Winkelzahl weniger zwey multiplicirt.

2.) Die Differenz zwischen der Winkelzahl und 5 wird, wenn es unter 5 Seiten zu der dreyfachen Seitenzahl addirt, sonst von ihr subtrahirt, und dieses mit der Seitenzahl multiplicirt.

3.) Die-

3.) Diese beyde Producte addirt, und mit 6 dividirt. Die unterste Seite eines viereckigt auf einander gesetzten zugespitzten Haufen Stuckkugeln seyn 10 Kugeln, so ist

1.)
$$\begin{array}{r} 1000 \\ 2 \\ \hline 2000 \end{array}$$

2.)
$$\begin{array}{r} 5 \\ 4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \text{addirt zu} \quad \begin{array}{r} 30 \\ 1 \\ \hline 31 \\ 10 \\ \hline 310 \end{array}$$

3.)
$$\begin{array}{r} 2000 \\ 310 \\ \hline 2310 \end{array}$$

6) 385 Kugeln in dem ganzen Haufen.

Der 2. Zusatz.

§. 288. Man setze die Pyramidalzahl $= p$ und Winkelzahl $= x$, so ist (§. 285.)

$$p = \frac{xn^3 - 2n^3 - xn + 5n + 3n^2}{6}$$

$$6p = xn^3 - 2n^3 - xn + 5n + 3n^2$$

$$6p + 2n^3 - 3n^2 - 5n = xn^3 - xn$$

$$\frac{6p + 2n^3 - 3n^2 - 5n}{n^3 - n} = x$$

$$\frac{6p : n + 2n^2 - 3n - 5}{n^2 - 1} = x$$

Der 4. Zusatz.

§. 289. Will man, wenn alles bekannt, die Seitenzahl finden, so setze man $x=n$, so ist (§. 285.)

$$6p=(a-2)x^3+3x^2-(a-5)x$$

$$\frac{6p}{a-2}=x^3+\frac{3}{a-2}x^2-\frac{(a-5)x}{a-2}$$

$$x^3+\frac{3}{a-2}x^2-\frac{(a-5)x}{a-2}-\frac{6p}{a-2}=0$$

Da aber dieses eine unreine cubische Gleichung ist, welche aufzulösen wir die benöthigte Gründe noch nicht gelegt, müssen wir die Auflösung noch anstehen lassen. Es ist aber um deswillen angeführt worden, um denen Anfängern eine Begierde zu den höheren Aequationen zu erregen.

Die 87. Aufgabe.

§. 290. **Aus der gegebenen Seiten- und Winkelzahl eine volle Pyramidalzahl zu finden.**

Auflösung.

Es sey die Seitenzahl $=n$

die Winkelzahl $=a$

so ist die Polygonalzahl $=\frac{1}{2}an(n-1)+1$ (§. 270.)

$$=\frac{an^2-an+1}{2}$$

daher ist die Pyramidalzahl (§. 276. 282.)

$=\frac{1}{2}$

$$=\tfrac{1}{2}a\int n^2 - \tfrac{1}{2}a\int n^1 + \int n^0$$

$$\tfrac{1}{2}a(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n) - \tfrac{1}{2}a(\tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n) + n \text{ (§. 277.)}$$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{6}an^3 + \tfrac{1}{4}an^2 + \tfrac{1}{12}an \\ &\qquad - \tfrac{1}{4}an^2 - \tfrac{1}{4}an \\ &\qquad\qquad + n \end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{6}an^3 - \tfrac{1}{6}an + n = \tfrac{1}{6}a(n^3 - n) + n = \tfrac{1}{6}an(n^2 - 1) + n$$

Der 1. Zusatz.

§. 291. Wird diese Generalformel auf die besonderen Fälle applicirt, so komt für die

Trigon. Pyr. Z. $= \frac{3n^3 + 3n}{6} = \frac{n^3 + n}{2}$

Quadr. P. Z. $= \frac{4n^3 + 2n}{6} = \frac{2n^3 + n}{3}$

Pentag. P. Z. $= \frac{5n^3 + n}{6}$

Hexag. P. Z. $= \frac{6n^3 + 0n}{6} = n^3$

Heptag. P. Z. $= \frac{7n^3 - n}{6}$

Octog. P. Z. $= \frac{8n^3 - 2n}{6} = \frac{4n^3 - n}{3}$ u. s. w.

Der 2. Zusatz.

§. 292. Hieraus folget denn wieder die Generalregel

1.) Die Winkelzahl wird mit dem Cubo der Seitenzahl multiplicirt.

2.) Dazu addirt das Product aus der Seitenzahl in

 die

die Differenz und 6, wenn die Seite weniger als 6; ist sie aber mehr, so subtrahirt solches Product.

3.) Was komt mit 6 dividirt.

Die Seite sey = 10 von einer Pentag. Pyram. Z. so ist

$$\begin{array}{rcr} 1000 & & 10 \\ 5 & & 1 \\ \hline 5000 & 6 & 10 \\ 10 & 5 & \\ \hline 5010 & 1 & \\ 6)\,\overline{835} & & \end{array}$$

Der 3. Zusatz.

§. 293. Man setze die Pyramidalzahl $= p$, die Winkelzahl $= x$, so ist

$$p = \frac{x(n^3 - n)}{6} + n$$

$$6p = x(n^3 - n) + 6n$$

$$6(p - n) = x(n^3 - n)$$

$$\frac{6(p - n)}{n(n^2 - 1)} = x.$$

Anmerkung.

§. 294. Was wegen Findung der Seitenzahl (§. 289.) bemerkt worden, gilt auch hier.

Die 88. Aufgabe.

§. 295. Wenn Kugeln in Gestalt eines Rectanguli neben einander gelegt werden, und über die-

diese wieder eine Schicht; da aber jede Seite des Rectanguli eine Kugel weniger hat, bis sich dieser Hauffe mit einer einigen Reihe Kugeln endiget, die Summe dieser Kugeln zu finden.

Auflösung.

Es sey die oberste Reihe Kugeln $= a$, so ist des nächst darunter liegenden Rectanguli

eine Seite	$= 2$	die andere	$= a + 1$
des zweyten	$= 3$	" " "	$= a + 2$
des dritten	$= 4$	" " "	$= a + 3$
des vierten	$= 5$	" " "	$= a + 4$ ꝛc.

daherd ist der ganze Hauffe

1.	a	$= a$
2.	$(a+1)$	$= 2a + 1 + 1$
3.	$(a+2)$	$= 3a + 4 + 2$
4.	$(a+3)$	$= 4a + 9 + 3$
5.	$(a+4)$	$= 5a + 16 + 4$
6.	$(a+5)$ ꝛc.	$= 6a + 25 + 5$ ꝛc. (§. 278.)

Hieraus ist klar, daß die Summe aus drey Progreßionen bestehe. Die erste ist eine arithmetische, da das erste Glied $+ a$, die Differenz $= a$, die Zahl der Glieder, so viel als Schichten Kugeln auf einander $= n$; die andere aus den Quadratzahlen von 1 bis auf $n - 1$; die dritte aus den einfachen Zahlen auch bis auf $n - 1$.

die Summe der ersten $= \frac{1}{2}(a + na)\,n$ (§. 187.)

der andern $= \int(n-1)^2 = \int n^2 - 2\int n^1 + \int(n-1)^0$

der dritten $= \int(n-1)^1 \qquad \int n^1 - \int(n-1)^0$

Summe $= \int n^2 - \int n^1$

$$= \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n \text{ (§. 277.)}$$
$$- \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n$$
$$= \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n$$

dahero ist die ganze Summe:

$$a\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^2 a + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n = \tfrac{1}{2}an(n+1) + \tfrac{1}{3}n(n^2-1)$$

Es sey die obere Reihe 30, und 10 Schichten, so ist der

$$\text{Hauffe} = \frac{30 \cdot 10}{2}(10+1) + \frac{10}{3}(100-1) =$$

$$150 \cdot 11 + \frac{10}{3} \cdot 99 = 1650 + 330 = 1980.$$

Der 1. Zusatz.

§. 296. Wenn $a=1$, so komt eine Formel heraus für eine Quadrat-Pyramidalzahl.

$$\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 + n(3n+1)}{6}$$

wie (§. 277.) auf andere Art erwiesen.

Der 2. Zusatz.

§. 297. Es sey die Summe der Kugeln $=p$, die oberste Reihe $=x$, so ist

$$p = \tfrac{1}{2}xn(n+1) + \tfrac{1}{3}n(n^2-1) \text{ (§. 295.)}$$
$$p - \tfrac{1}{3}n\,(n^2-1) = \tfrac{1}{2}xn\,(n+1)$$
$$\frac{p - \tfrac{1}{3}n\,(n^2-1)}{\tfrac{1}{2}n(n+1)} = x$$

Die

Die 15. Erklärung.

§. 298. Eine Pronikzahl ist, wenn zum Quadrat die Wurzel addirt wird. Und eine solche Wurzel wird Pronikwurzel genennet, als: $9 + 3 = 12$ ist Pronikzahl und 3 Pronikwurzel.

Der 1. Zusatz.

§. 299. Wenn 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4, 2c. multiplicirt wird, wie (§. 278), so entstehen pur Pronikzahlen, und ihre Glieder geben eine Pronikprogreßion der natürlichen Zahlen.

Der 2. Zusatz.

§. 300. Die Formel $\frac{1}{3}n(n+2)(n+1)$ (§. 278.) lehrt die natürliche Pronikprogreßion summire . Z. E. die Pronikprogreßion 2. 6. 12. 20. 30. 42. 56. 72. 90. hat 9 Glieder, ist also die Summe $\frac{9}{3}(9+2)(9+1) = 3 . 11 . 10 = 330$.

Die 89. Aufgabe.

§. 301. Aus einer Zahl die Pronikwurzel zu ziehen.

Auflösung

Die Pronikzahl sey $= a$, die Wurzel $= x$, so ist

$$x^2 + x = a$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{a + \frac{1}{4}}$$

$$x = \sqrt{a + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

Es sey $a = 20$; so ist $x = \sqrt{20 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{81}{4}} - \frac{1}{2}$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$. denn $16 + 4 = 20$.

Die 90. Aufgabe.

§. 302. Es sind drey Klumpen, jeder aus Gold, Silber und Kupfer zusammen geschmolzen, in dem ersten ist 2 Loth Gold, 4 Loth Silber und 8 Loth Kupfer, in dem zweyten 3 Loth Gold, 9 Loth Silber und 6 Loth Kupfer, in dem dritten 10 Loth Gold, 5 Loth Silber und 15 Loth Kupfer. Wie viel muß von jedem genommen werden, daß man einen Klumpen bekomme, in welchem 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 9 Loth Kupfer seye.

Auflösung.

Von dem ersten soll genommen werden $= x$
Von dem andern $= y$
Von dem dritten $= z$

multiplicirt man nun 2 Loth Gold, 4 Loth Silber und 8 Loth Kupfer mit x. desgleichen 3 Loth Gold, 9 Loth Silber und 6 Loth Kupfer mit y, und 10 Loth Gold, 5 Loth Silber und 15 Loth Kupfer mit z, so muß es 4 Loth Gold, 6 Loth Silber und 9 Loth Kupfer geben, nemlich

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4x + 8x \\ 3y + 9y + 6y \\ 10z + 5z + 15z \end{array}\right\} = 4 + 6 + 9.$$

nemlich das Gold zusammen $2x + 3y + 10z = 4$
das Silber $4x + 9y + 5z = 6$
das Kupfer $8x + 6y + 15z = 9$

$2x +$

$$2x + 3y + 10z = 4$$

$$x = \frac{4 - 3y - 10z}{2}$$

$$4x + 9y + 5z = 6$$

$$x = \frac{6 - 9y - 5z}{4}$$

$$8x + 6y + 15z = 9$$

$$x = \frac{9 - 6y - 15z}{8}$$

$$\frac{4 - 3y - 10z}{2} = \frac{6 - 9y - 5z}{4},$$

4) $$8 - 6y - 20z = 6 - 9y - 5z$$

$$3y = 15z - 2$$

$$y = 5z - \tfrac{2}{3}$$

$$\frac{6 - 9y - 5z}{4} = \frac{9 - 6y - 15z}{8}$$

8) $$12 - 18y - 10z = 9 - 6y - 15z$$

$$3 + 5z = 12y$$

$$\frac{3 + 5z}{12} = y$$

$$5z - \tfrac{2}{3} = \frac{3 + 5z}{12}$$

$$60z - 8 = 3 + 5z$$

$$55z = 11$$

$$z = \tfrac{1}{5}$$

wird der Werth von z in die Aequation $y = 5z - \tfrac{2}{3}$ gesetzt, so ist $y = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}$

wird der Werth von y und z in die Aequation

$$x = \frac{4 - 3y - 10z}{2}$$ gesetzt, so ist

$$x = \frac{4 - 1 - 2}{2} = \frac{1}{2}$$

Probe vom ersten $\frac{1}{2}$ gibt	Gold	1	Silber	2	Kupf.	4
zweyten $\frac{1}{3}$ gibt	„	1	„	3	„	2
dritten $\frac{1}{5}$ gibt	„	2	„	1	„	3
		4	„	6	„	9

Anmerkung.

§. 303. Es giebt sehr viel unmögliche Fälle bey dieser Aufgabe, welches sich alsdenn zeiget, wenn x, y oder z negativ heraus kommen: denn kein Stück Metall kann negativ eingeschmolzen werden. Diese Aufgabe könnte auch allgemein aufgelößt werden; allein wer es versuchen will, wird befinden, daß die viele Buchstaben so viel Beschwerlichkeiten machen, daß man lieber bey den Zahlen bleibet.

Die 91. Aufgabe.

§. 304. Es kauft jemand 10 Malter Kernen, 6 Malter Roggen und 4 Malter Gersten für 96 fl. desgleichen 12 Malter Korn, 3 Malter Rocken, 7 Malter Gersten für 105 fl. und 13 Malter Korn, 19 Malter Rocken, 2 Malter Gerste für 160 fl. wie viel galt jedes Malter?

Auflösung.

Das Malter Kernen galt $= x$
Roggen $= y$
Gersten $= z$ so ist

10x

$$10x + 6y + 4z = 96, \quad 12x + 3y + 7z = 105,$$

$$x = \frac{96 - 6y - 4z}{10} \qquad x = \frac{105 - 3y - 7z}{12}$$

$$13x + 19y + 2z = 160$$

$$x = \frac{160 - 19y - 2z}{13}$$

$$\frac{96 - 6y - 4z}{10} = \frac{105 - 3y - 7z}{12}$$

$$1152 - 72y - 48z = 1050 - 30y - 70z$$

$$102 + 22z = 42y$$

$$\frac{17}{7} + \frac{11z}{21} = y$$

ferner $\dfrac{96 - 6y - 4z}{10} = \dfrac{160 - 19y - 2z}{13}$

$$1248 - 78y - 52z = 1600 - 190y - 20z$$

$$112y = 352 + 32z$$

$$14y = 44 + 4z$$

$$y = \tfrac{22}{7} + \frac{2z}{7}$$

$$\tfrac{22}{7} + \frac{2z}{7} = \frac{17}{7} + \frac{11z}{21}$$

$$\tfrac{5}{7} + \frac{2z}{7} = \frac{11z}{21}$$

$$\tfrac{5}{7} = \frac{5z}{21}$$

$$\tfrac{1}{7} = \frac{z}{21}$$

$$3 = z$$

Der

der Werth von z in $y = \frac{22}{7} + \frac{21}{7}$ substituirt,

$$y = \frac{22}{7} + \frac{6}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

der Werth von y und z in $x = \frac{96 - 6y - 4z}{10}$ substituirt

$$x = \frac{96 - 24 - 12}{10} = \frac{60}{10} = 6y$$

die Probe ist leicht zu machen.

Die 1. Anmerkung.

§. 305. Was §. 303. gesagt worden, gilt auch von dieser Aufgabe.

Die 2. Anmerkung.

§. 306. Die Auflösung der höheren Aequationen und undeterminirten Aufgaben hätten hier füglich auch Platz; allein da diese etwas schwer scheinen, und wir den Anfängern nur Milchspeise zu geben gesonnen, wodurch sie angelocket werden, die Schriften der grossen Mathematicker selber zu lesen: so versparen wir dieses, nebst noch mehr schweren Dingen auf ein andermal. Doch wollen wir indessen nur einen Vorschmack von undeterminirten Aufgaben geben.

Die 92. Aufgabe.

§. 307. Es sollen 6 Gulden in 7 und 17 Kreuzerstücken bezahlt werden, daß es gerad aufgehet, wie viel muß man von jeder Sorte haben?

Auflösung.

Von 7 Kreuzerstücken nehme man x
von 17 Kreuzerstücken y.

$7x +$

$7x + 17y = 360$ kr.

$7x = 360 - 17y$

$x = 51\frac{3}{7} - 2\frac{3}{7}y$

Hieraus ist klar, daß y so gros müsse angenommen werden, daß, wenn es mit $2\frac{3}{7}$ oder auch nur mit $\frac{3}{7}$ multiplicirt wird, $\frac{3}{7}$ mache, damit $\frac{3}{7}$, so bey 51 stehet, durch Subtrahiren aufgehe, und folglich x in ganzen Zahlen heraus komme.

Es sey $y = 1$, so ist $y$mal $\frac{3}{7}$	$= \frac{3}{7}$
$= 2$	$= \frac{6}{7}$
3	$= 1\frac{2}{7}$
4	$= 1\frac{5}{7}$
5	$= 2\frac{1}{7}$
6	$= 2\frac{4}{7}$
7	$= 3$
8	$= 3\frac{3}{7}$

Es kann also $y = 1$ oder $= 8$ seyn, im ersten Fall ist $x = 51\frac{3}{7} - 2\frac{3}{7} = 49$, im andern Fall ist $x = 51\frac{3}{7} - 2\frac{3}{7} \cdot 8 = 51\frac{3}{7} - 19\frac{3}{7} = 32$.

49 Siebener	32 Siebener	8 Siebenzehner
7	7	17
343	224	136.
17 Siebenzehner	136	
360	360	

fährt man fort, wird man finden, daß y auch 15 seyn kann. Wenn aber $y = 22$ gesetzt wird, komt zwar auch $\frac{3}{7}$, allein $2\frac{3}{7} \cdot 22$ gibt $53\frac{3}{7}$, welches von $51\frac{3}{7}$ nicht abgezogen werden kann; darum wird der Fall unmöglich.

Anmerkung.

§. 308. Es gibt Fälle, die hieher gehören, da es nur einmal möglich ist, wodurch die Aufgabe determiniret wird.

Als

Als wenn vorstehende Aufgabe auf zwey Gulden gesetzt würde.

Die 93. Aufgabe.

§. 309. Eine Gesellschaft von Männern, Weibern, Junggesellen und Jungfrauen, an der Zahl 30, verzehren mit einander 30 Gulden, so daß ein Mann zahlt 1 fl. 30. kr. ein Junggesell 1 fl. 12 kr. eine Frau 45. kr. und eine Jungfer 30 kr. Wie viel Personen warens von jeder Gattung?

Auflösung.

Es seyen Männer $= x$
Weiber $= y$
Junggesellen $= z$
Jungfrauen $= 30 - x - y - z$

Wenn nun alles zu Kreuzern gemacht wird, so zahlen zusammen

die Männer	$90x$
die Weiber	$45y$
die Junggesellen	$72z$
die Jungfrauen	$900 - 30x - 30y - 30z$

$$1800 = 900 + 60x + 15y + 42z$$

$$3)\ 900 = 60x + 15y + 42z$$

$$300 = 20x + 5y + 14z$$

$$300 - 5y - 14z = 20x$$

$$15 - \frac{y}{4} - \frac{7z}{10} = x$$

Man siehet leicht, daß für y eine Zahl müsse angenommen werden, die sich mit 4, und für z, die sich mit 10 dividiren lasse, das ist, y kan seyn 4, 8, 12, 16, 20, 2c.

z aber

z aber 10, 20, 30, ꝛc. wäre aber $z = 20$, so wäre $\frac{7z}{10} = 14$, welches unmöglich, denn wenn y nur $= 4$ wäre, würde $-\frac{y}{4} - \frac{7z}{10} = 15$, wodurch $x = 0$ würde: also ist z nothwendig $= 10$; y aber kann auf mehrerley Art genommen werden.

	1	2	3	4	5	6
Junggesellen	10	10	10	10	10	10
Weiber	4	8	12	16	20	4
Männer	7	6	5	4	0	0
Jungfern	9	6	3	0	0	6

Hieraus ist ersichtlich, daß 1, 2, 3 möglich, 4, 5, 6 aber unmöglich.

Die 49. Aufgabe.

§. 310. **Vorstehende Aufgabe allgemein aufzulösen.**

Auflösung

Das mit einander bezahlte Geld sey $= m$
die Anzahl der Personen $= n$
Männer $= x$ und einer gibt $= a$
Weiber $= y$ und eine gibt $= b$
Junggesellen $= z$ und einer gibt $= c$
Jungfern $= n - x - y - z$ eine gibt $= d$

also geben alle zusammen
Männer $= ax$
Weiber $= by$
Junggesellen $= cz$

Jung-

Jungfern $= dn - dx - dy - dz$

$$dn + (a-d)x + (b-d)y + (c-d)z = m$$

$$(a-d)x = m - dn - (b-d)y - (c-d)z$$

$$x = \frac{m-dn}{a-d} - \frac{(b-d)}{a-d}y - \frac{(c-d)}{a-d}z$$

Wie hieraus Regeln zu machen, zeigen so wohl die Buchstaben selber als der vorhergehende §. 309.

Anmerkung.

§. 311. Es wird insgemein dieses die Regula Cöcis oder Virginum genennet, die sich auf viele andere Fälle anwenden lässet, welche aus dem bisher gesagten leicht zu verstehen sind. Wenn nicht nur zwey, sondern mehrere Dinge von verschiedenem Werth zu mischen sind, daß sie einen bestimmten mittlern Werth haben sollen, kan man auch diese Regulam Virginum brauchen, wie folgende Aufgabe zeiget.

Die 95. Aufgabe.

§. 312. Man hat viererley Wein, die Maas zu 48 kr. zu 40 kr. zu 30 kr. und zu 16 kr. die man so mischen will, daß die Maas 30 kr. koste, wie viel muß von jedem genommen werden.

Auflösung.

Von dem 48 kr. Wein nimmt man x
= = 40 = = = y
= = 30 = = = z
= = 16 = = = $1 - x - y - z$

Nemlich 1 bedeutet ein Maas, x aber ein Theil davon, und so y und z. Dahero

kostet

kostet	x	„	„	$48x$
	y	„	„	$40y$
	z	„	„	$30z$
	$1-x-y-z$			$16-16x-16y-16z$
Zusammen		„		$36=16+32x+24y+14z$

$$20-24y-14z=32x$$

$$\frac{5}{8}-\frac{3y}{4}-\frac{7z}{16}=x$$

Hieraus ist klar, daß y und z nach Belieben angenommen werden können, doch erfordert die Beschaffenheit der Aufgabe, 1) daß y und z Brüche seyn müssen, weil sie von 1 abgezogen werden sollen. 2) Sie müssen solche Brüche seyn, daß wenn sie in die gefundene Gleichung gesetzt werden, von $\frac{5}{8}$ abgezogen werden können. 3) Sie müssen so seyn, daß sie mit x zusammen genommen, weniger als 1 ausmachen, weil alle drey von 1 abgezogen werden sollen. Nimmt man dieses in Acht, wird man finden, daß sich diese Aufgabe auf gar vielerley Art auflösen lasse, die wir aber nicht alle, wegen der Menge, anführen wollen, sondern nur etliche.

Es sey $y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{6}$, so ist $\frac{5}{8}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 4}-\frac{7\cdot 1}{16\cdot 6}=x=\frac{60}{96}-\frac{18}{96}-\frac{7}{96}=\frac{35}{96}=x$, wird nun $\frac{35}{96}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ von 1 abgezogen, so bekomt man den Theil vom 16 kr. Wein, wird seyn $\frac{7}{32}$.

Probe	$\frac{35}{96}$	vom 48 kr. Wein, gibt		$17\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{4}$	40	„	10
	$\frac{1}{6}$	30	„	5
	$\frac{7}{32}$	16	„	$3\frac{1}{2}$
				36.

Es sey $y=\frac{1}{8}$, $z=\frac{1}{2}$, so ist $x=\frac{5}{8}-\frac{3}{32}-\frac{7}{32}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.

Ferner $1-\frac{5}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$, davon die Probe leicht zu machen.

Anderst.

Die Anzahl der Maase vom

48 kr. Wein sey	$=x$,	so kosten sie	$48x$
40 ⸗	$=y$	⸗	$40y$
30 ⸗	$=z$	⸗	$30z$
16 ⸗	$=v$	⸗	$16v$

Zusammen $48x+40y+30z+16v$.

Da nun dieses so viel Maaß sind, als $x, y, z,$ und v zusammen betragt, und eine jede Maas 36 kr. gelten soll, so müssen alle zusammen gelten

$36x+36y+36z+36v$, folglich muß seyn

$$48x+40y+30z+16v = 36x+36y+36z+36v$$

$$12x+4y=6z+20v$$

$$6x+2y=3z+10v$$

$$2y=3z+10v-6x$$

$$y=\tfrac{3}{2}z+5v-3x$$

Hier können vor z, v und x alle nur erdenkliche Zahlen angenommen werden, um y zu bestimmen, mit der einzigen Einschränkung, daß sich $3x$ von $\tfrac{3}{2}z+5v$ abziehen lasse, und wenn man pur ganze Zahlen haben will, muß z eine gerade Zahl seyn.

Es sey $x=2, z=2, v=1$, so ist $y=3+5-6=2$

Von 48 kr. Wein	2 Maas	gilt 96
40	2	80
30	2	60
16	1	16
	7	252

$$7)\underline{252}$$
$$36$$

Die

Die 96. Aufgabe.

§. 313. Es sind 3 Krämer, einer hat 27 Ehlen Tuch, der andere 34, der dritte 41, gibt keiner die Ehle theurer als der andere, gleichwol, da sie ihr sämtlich Tuch verkauft hat keiner mehr Geld gelößt, als der andere. Wie ist dieses zugegangen?

Auflösung.

Weil einer für die Ehle bekommen, was der andere, so ist die Sache nicht möglich, es sey dann, daß sie etlichmal daran verkauft, als den ersten Tag theurer als den folgenden da denn der erste Krämer viel Ehlen theuer und wenig wohlfeil, der andere weniger Ehlen theuer und mehr wohlfeil, und der letzte am wenigsten Ehlen theuer und am meisten wohlfeil verkauft hat.

Sie haben den ersten Tag die Ehle verkauft für m, den andern Tag für n

Der erste habe für den theuren Preis $= m$ verkauft x Ehlen, so hat er für den wohlfeilen verkauft $27 - x$, folglich hat er gelößt $mx + 27n - nx = (m - n)x + 27n$

Der zweyte für m die Ehlen y, für n die Ehlen $34 - y$, hat also gelößt

$$my + 34n - ny = (m - n)y + 34n$$

Der dritte für m, die Ehlen z, für n, die Elen $41 - z$ hat also gelößt

$$mz + 41n - nz = (m - n)z + 41n$$

Es ist demnach, vermöge der Aufgabe

$$(m - n)x + 27n = (m - n)y + 34n$$

$$(m - n)x = (m - n)y + 7n$$

$$x = y + \frac{7n}{m - n}$$

$$(m-n)y+34n=(m-n)z+41n$$
$$(m-n)y=(m-n)z+7n$$
$$y=z+\frac{7n}{m-n}$$

m und n sind nicht angegeben, werden also nach Belieben angenommen; will man aber keine Brüche haben, so müssen sie so angenommen werden, daß $\frac{n}{m-n}$ mit 7 multiplicirt aufgehe.

Es seye $m=2$, $n=1$, so ist $\frac{n}{m-n}=\frac{1}{2-1}$

Folglich $\frac{7n}{m-n}=7$ oder $m=8$, $n=1$, so ist

$$\frac{n}{m-n}=\frac{1}{8-1}=\tfrac{1}{7} \text{ und } \frac{7n}{m-n}=1.$$

Ist nun $\frac{n}{m-n}=1$, so ist

$$x=y+7,\ y=z+7,\ x=z+14$$

Aus z läßt sich hernach x und y bestimmen und können alle Zahlen unter 13 dafür angenommen werden; 13 aber kann es nicht seyn, denn sonst würde $x=13+14=27$, in welchem Fall der erste den ersten Tag all sein Tuch würde verkauft haben, und den andern Tag nichts mehr übrig behalten.

Es

Es sey $z = 1$, so ist $x = 15$, $y = 8$.

1. T.	1) 15 E. p. 2 = 30		2) 8 E. 2 = 16		3) 1 E. 2 = 2	
2. T.	12 E. p. 1 = 12		26 p. 1 = 26		40 1 = 40	
	27	42	34	42	41	42

✠ ✠ ✠

§. 314. Damit man Gelegenheit habe, sich selbsten in Formirung der Aequationen und Reductionen zu üben, so wollen wir noch etliche Exempel ohne Auflösung beysetzen.

1) Es dinget jemand einen Arbeiter auf 12 Wochen oder 84 Tage, und verspricht ihm diese Tage über die Kost, und täglich, wenn er arbeitet, 18 kr.; arbeitet er aber nicht, so soll ihme der Arbeiter täglich 6 kr. für Kost bezahlen. Da sie nach verflossener Zeit mit einander rechnen, ist keiner dem andern nichts schuldig, wie viel Tage hat er gearbeitet und wie viel Tage ist er müßig gegangen? 63 Tage müßig gegangen, und 21 Tag gearbeitet.

2) In einer Gesellschaft waren etliche Jungfern, die gefragt wurden, wie viel ihrer seyen? Sie gaben zur Antwort: Es sind eben so viel Junggesellen bey uns, als wir sind, und wir alle zusammen sind dreymal so viel über 20, als wir allein unter 20 sind. Es waren 16.

3) Einer hat etliche Paar Tauben, will ihm einer für 4 Paar geben 1 fl. Es komt ein anderer, bezahlt für 3 Paar 1 fl., gewinnt also 2 fl., da er vorhin nur 1 fl. gewonnen, wie viel hat er? Antwort: 12.

4) Ein Bettler hat etliche Kreuzer, erbettelt eben so viel dazu, kauft aber für 8 kr. Brod. Des andern Tags erbettelt er wieder so viel, als er noch hatte, das ist, verdoppelt seinen Rest, und kauft für 16 kr. Fleisch. Den dritten Tag erbettelt er wieder so viel, als sein Rest war, trinkt aber ein Maas 6 Batzen Wein, und damit war sein Geld ausgegeben, wie viel hatte er Anfangs? Antw. 11 kr.

5) Ein Metzger kauft eine Anzahl Ochsen, die Hälfte da-

von schlägt er bey den Bauern ein, und ein Drittel an einem andern Ort, den vierten Theil so viel, als er am letztern Ort gelassen, nimmt er nach Haus, den Rest verkauft er, und zwar jeden Ochsen um so viel Gulden, als er Ochsen verkauft, und erlößt so viel Gulden, als er anfänglich Ochsen gekauft, wie viel Ochsen warens anfänglich? Antw. 144.

6) Es sind vier Zahlen in proportione continua, deren Product in einander $1024 = a$, die Summe aber des ersten und letzten $18 = b$ macht, was sinds vor Zahlen? Antw. 2. 4. 8. 16. oder erste Zahl =

$= \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a}$;

letzte $= \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a}$;

zweyte $= \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 a - a \cdot a})}$

dritte $= \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 a - a\sqrt{a}})}$

7) Es sind drey Zahlen in proportione continua, deren Product $216 = a$ die Summe aber $19 = b$ macht, was sind es vor Zahlen? Antw. 4. 6. 9. Die mittlere Zahl $= \sqrt[3]{a}$. es sey $b - \sqrt[3]{a} = c$, so ist die erste $= \frac{1}{2}c - \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \sqrt[3]{a^2}}$ die letzte $= \frac{1}{2}c + \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \sqrt[3]{a^2}}$

8) Es hat jemand 1000 fl. $= a$ auf Zinß ausgelehnt, daß der Zinß immer wieder zu Capital geschlagen werde, nach drey Jahren hat er 1728 fl. $(= b)$, wie viel pro Cent hat er des Jahrs bekommen? Antwort: 20. oder $x = 100$ $(\sqrt[3]{b:a} - 1)$ überhaupt wenn die Jahre $= n$, so ist

$x = 100\left(\sqrt[n]{b:a} - 1\right)$

9) Eine Compagnie Soldaten werden, wegen einer erstiegenen Vestung, dergestalt belohnet, daß der erste eine gewisse Summe Gelds bekomt, der zweyte etwas weniger, der dritte wieder um so viel weniger, u.s.w. Wie das Geld

Geld ausgetheilet worden, konnten zwey, wegen Blessuren, nicht gegenwärtig seyn. Man gab daher ihren Antheil ihren Cammeraden. Die steckten ihr eigenes und ihrer Cammeraden zusammen in einen Sack, und wußten bey ihrer Heimkunft nicht mehr, was jedem gebührte. Der erste hatte für sich und seinen Cammeraden 92. fl. und wußte noch, daß er der zweyte und sein Cammerad der siebende gewesen. Der andere brachte 71 fl. heim, und wußte, daß er der 11te, sein Cammerrad aber der 4te gewesen? Was gebühret jedem? Antwort: dem 2ten 54 fl. 45 kr. dem 7den 37 fl. 15 kr. dem 4ten 47 fl. 45 kr. und dem 11ten 23 fl. 15 kr.

10) Wenn die Summe zweyer Glieder in einer geometrischen Progreßion ($=a$) gegeben ist, und die Summe 2er andern ($=b$), die eben so weit von einander abstehen ($=r$) als die erstere, nebst der Zahl, die wie vielteste Glieder es seyen (n und m), den Exponenten ($=y$) und erstes Glied ($=x$) zu finden. Die Aequationen sind

$$xy^{m-1}+xy^{m-1+r}=a\,;\quad xy^{n-1}+xy^{n-1+r}=b$$

folglich $y=\sqrt[n-m]{b:a}$ und $x=a:(y^{r}+1)y^{m-1}$

oder $x=b:(y^{r}+1)y^{n-1}$

11) Zwey Arbeiter arbeiten um gleichen Taglohn, der erste 51 Tage, der andere 63 Tage, sie lassen sich theils mit Frucht theils mit Geld bezahlen, der erste bekomt 3 Malter Frucht, und 4 fl. 18 kr. Geld, der andere 4 Malter Frucht und 3 fl. 24 kr. Geld, wie hoch ist das Malter Frucht gerechnet worden? Antwort: 6 fl. 30 kr.

12) Es läßt jemand einen Brunnen graben, verspricht dem Meister dafür 255 fl. mit dem Beding, wenn er ihn 50 Schuhe tief graben müsse; solte er aber denselben mehr

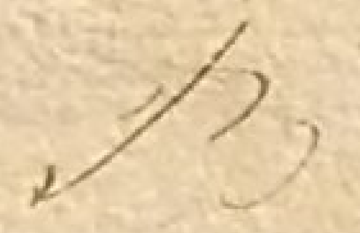
oder

oder weniger tief zu graben nöthig haben, so wolle er ihm auch dergestalt mehr oder weniger zahlen, daß er für den zweyten Schuh zweymal, für den dritten dreymal, ꝛc. so viel geben wolle, als für den ersten, nun bekam der Meister 93 fl. wie viel Schuh tief hat er gegraben? Antw. 30.

13) Ein Kaufmann bietet ein Stück Tuch von 36 Ehlen für 120 fl., der Käufer marktet so viel ab, als er wirklich für 4 Ehlen zahlt, wie viel gibt er für das Stück Tuch? Antwort: 98 fl.

14) Cupido beklagte sich bey seiner Mutter, die Musen haben ihm seine Aepfel genommen. Clio habe ihm genommen ein Fünftel, Euterpe ein Zwölftel, Thalia ein Achtel, Melpomene ein Zwanzigstel, Erato ein Siebentel, Terpsychore ein Viertel, Polymnie 30, Uranie 105, und Calliope 360, und nun habe er nur noch 5 Aepfel, wie viel hatte er? Antwort: 3360.

E N D E.



F.G. Dicaul

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Maler, Jakob Friedrich

Jacob Friderich Malers ... Algebra zum Gebrauch hoher und niederer Schulen

Carlsruhe 1769

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.139
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739940-8
VD18 1201835X-001